


$B 262 726
YA 02417

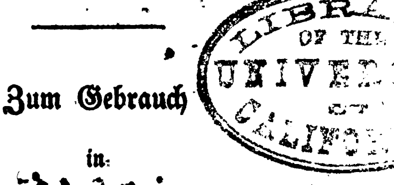






# Gründliche Anweisung zur Rechenkunst.

Zum Gebrauch




in

lateinischen und in Gewerbschulen

von

**Andreas Neubig,**

Doktor der Philosophie und k. b. Lyceal-Professor.

Sechste vermehrte Auflage.

(Die Facite oder Rechnungsergebnisse kann jeder Lehrer von der Buchhandlung unentgeldlich beziehen.)

Erlangen,

Verlag von Heyder und Zimmer.

1851.

# Vorrede
## zur vierten Auflage.

Was ich mir gleich bei der ersten Auflage zum Ziele gesetzt hatte, das habe ich auch jetzt bei dieser vierten Auflage streng im Auge behalten und möglichst zu erreichen gestrebt, nämlich ein gründliches, den Geist anregendes und fruchttragendes Rechnen zu befördern. Dieß hat einmal den Vortheil, daß die Regeln des Rechnens bleibendes Eigenthum des Geistes werden, während sie bei dem blinden und mechanischen Verfahren schnell wieder vergessen sind; sodann gewinnt der Rechner seine Wissenschaft lieb, indem dem Vernunftbedürfniß, überall die Gründe des Verfahrens zu erkennen, Genüge geschieht. Der Geist weilt nun gerne in seiner Wissenschaft und dringt immer tiefer in dieselbe ein; er findet Vergnügen in ihr und widmet ihr manche Stunde zur Unterhaltung. Ich habe hierüber seit der Erscheinung der ersten Ausgabe (1814) viele, sehr erfreuliche Erfahrungen gemacht. Um nun dieses Büchlein seiner Bestimmung immer anpassender zu machen, habe ich

manchen Artikel umgearbeitet und außer der Gründlichkeit, die nie aus dem Auge verloren werden durfte, vorzüglich auf höchst mögliche Deutlichkeit hingearbeitet.

Es ist überall gut, wenn man das Besondere unter sein Allgemeines richtig zu bringen weiß. Aber ehe man dieß lernt, muß manche Uebung vorangehen. In den bisherigen Ausgaben habe ich die Zinsrechnung nicht besonders aufgeführt und abgehandelt, weil sie unter die Proportionsrechnung gehört. Aber ich habe doch gefunden, daß es für den Anfänger nützlich ist, die hieher gehörigen Fälle besonders behandelt zu sehen. Hiedurch hat diese Ausgabe eine nicht unbedeutende Erweiterung erhalten. Die größte Vermehrung besteht aber in der fast um das Doppelte erhöheten Anzahl von Uebungsbeispielen, wozu ich von vielen Seiten aufgefordert worden bin. Es sind nunmehr der Beispiele so viele, daß man füglich einen doppelten Kursus bilden kann; wozu ich auch dadurch behilflich war, daß ich an den meisten Orten die Beispiele durch I. und II.*) geschieden habe. Es erwächst hieraus auch der Vortheil,

*) in der fünften und sechsten Auflage auch schon durch I, II. und III.

daß, wenn Schüler die Klasse wiederholen müssen, für diese ein anderer Vorrath von Beispielen vorhanden ist.

Auch die vermischten Aufgaben des siebenten Kapitels, welche das Nachdenken besonders reitzen, sind bedeutend vermehrt worden. Nur muß ich dabei bemerken, daß diese Aufgaben nicht etwa durch bloses Probiren, sondern durch Grundsätze und Lehren der Arithmetik, wie sie in den vorhergehenden Kapiteln vorgekommen sind, aber in mannigfaltigen Wendungen und Verbindungen, die der nachdenkende Geist erfinden muß, können und sollen aufgelöset werden. So sieht man bald in der ersten Aufgabe, daß, wenn die sämmtlichen Kinder, von dem ältesten an, der Kürze halber, durch A, B, C, D, E und F bezeichnet werden, B 25 fl., C 50 fl., D 75 fl., E 100 fl. und F 125 fl. und alle 5 zusammen 375 fl. voraus haben. Diese werden von der ganzen Summe 12525 zum voraus weggenommen oder abgezogen und dann der Rest in 6 gleiche Theile getheilt. Nun wird man leicht das Uebrige vollends zu berechnen verstehen. Eben so berechnet man in der zweiten Aufgabe zuerst, wie viel die sämmtlichen Arbeiter in 1 Tage zusammen verdienen (103

Thlr.) und bildet dann mit den übrigen Angaben einen bekannten Proportions- oder Regel de Tri-Ansatz, daß man die verlangte Anzahl der Tage findet. Auf solche und ähnliche Weise verfährt man bei den übrigen Aufgaben. Um nun das richtige Ziel nicht nur bei diesen Aufgaben, sondern auch bei denen der vorhergehenden Kapitel nicht zu verfehlen, sollen die sogenannten Facite oder Rechnungsergebnisse auf einen besondern Bogen abgedruckt und denjenigen Lehrern und Freunden der Rechenkunst, die sie zu besitzen wünschen, auf besonderes Verlangen und zwar unentgeldlich zugestellt werden. Jedoch hält man es für beleidigend, auch von den Aufgaben der sogenannten 4 Species die Rechnungsergebnisse mitzutheilen; darum wird man sich blos auf die Aufgaben von dem fünften bis zum letzten Kapitel beschränken.

Uebrigens dient denjenigen, welche etwa Lust haben, in den mathematischen Wissenschaften weiter fortzuschreiten, zur Nachricht, daß sich an diese Anweisung zur Rechenkunst mein **Grundriß der reinen Mathematik** (Vierte, mit mehr denn 1000 neuen Uebungsaufgaben versehene Auflage. Bayreuth bei Grau 1846) anschließt, welcher für diejenigen, denen die bisher vorge-

tragenen Lehren zum wahren Eigenthum geworden sind, keine sonderliche Schwierigkeit enthalten wird.

Mit der äußern Ausstattung des Buches wird man vollkommen zufrieden sein. Druck und Papier sind sehr gut. Ueberdieß hat der Herr Verleger wiederum einen so geringen Preis für die so stark vermehrte Ausgabe gestellt, daß von seiner Uneigennützigkeit auch dieses Büchlein lautes Zeugniß gibt.

Bayreuth, den 30. August 1833.

---

## Zur fünften Auflage.

Ich habe diese neue Ausgabe Zeile für Zeile genau durchgesehen und das, was die Deutlichkeit und Faßlichkeit zu fördern schien, beizufügen nicht unterlassen, um dieses Werkchen seiner Vollendung immer näher zu führen und brauchbarer zu machen. Deßhalb ist auch dießmal auf den Wunsch einsichtsvoller Männer, deren Stimme zu hören ist, die Anzahl der Uebungsaufgaben vermehrt worden, wenn auch nicht in der verlangten Ausdehnung, weil die Zeit drängte. Dadurch glaubte ich zugleich der

hohen Anerkennung, kraft deren dieses Werkchen in allen lateinischen Schulen des Königsreichs Bayern eingeführt worden ist, den besten Dank darzubringen. Auch bitte und fordere ich alle Pädagogen und Kenner auf, ihre Wünsche und Ansichten in Bezug auf weitere Vervollkommnung des Buches mir gefälligst mitzutheilen, um bei einer etwaigen neuen Auflage den besten Gebrauch davon zu machen.

Bayreuth, zur Weihnachtszeit 1847.

---

## Zur sechsten Auflage.

Auch diese Auflage hat manchen, nicht zu übersehenden Zusatz erhalten, und die Aufgaben sind so weit vermehrt worden, daß fast für alle Rechnungsarten ein dreijähriger Wechsel hergestellt wurde.

Bayreuth, Ostern 1851.

Dr. Neubig.



# Der Rechenkunst

## Erstes Kapitel.

### Von den Zahlen, insbesondere den ganzen, und den vier Rechnungsarten mit denselben.

---

§. 1. Die Rechenkunst (Arithmetik) lehrt die Eigenschaften der Zahlen und das richtige und sichere Verfahren, aus gegebenen oder bekannten Zahlen und ihrem Verhalten zu einander andere unbekannte zu finden.

Unter einer Zahl versteht man eine zusammengefaßte oder bestimmte Menge von gleichartigen Dingen. Man nennt aber Dinge gleichartig, insofern man bei ihnen nur eine oder mehre Eigenschaften betrachtet, welche sie gemeinschaftlich haben; ungleichartig, in wie fern man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. Das Gleichartige, dessen Menge durch die Zahl bestimmt wird, heißt die Einheit oder das Eins. Daher kann man auch sagen: die Zahl ist ein Inbegriff von Einheiten. Z. B. Man sieht einen Haufen Obst. Wenn man bei den einzelnen Stücken nur darauf sieht, daß jedes die Eigenschaft hat, um sie zum Obste zählen zu können: so sind es lauter gleichartige Dinge, und sie alle bilden z. B. die Zahl 100 (Hundert). Diese 100 Stück Obst können aber insofern ungleichartig oder verschiedenartig sein, daß einige (z. B. 30 d. h. dreißig)

die Eigenschaft der Aepfel, andere (z. B. 50 d. h. funfzig) die Eigenschaft der Birnen, und die übrigen (z. B. 20 d. h. zwanzig) die Eigenschaft der Nüsse haben. In Bezug auf Obst gilt jedes einzelne Stück für die Einheit der Zahl 100; in Bezug auf die Aepfel nur jeder einzelne Apfel u. s. w. für die Einheit. Man kann aber die Einheit auch wieder aus mehren Einheiten zusammengesetzt denken und nehmen, z. B. wenn man im gemeinen Leben sagt: 2 (zwei) Schock Nüsse, so versteht man zwei Einheiten, von welchen aber jede selbst aus 60 (sechzig) Stücken (Einheiten) besteht.

§. 2. Durch Wiederholung der Einheit entstehen alle ganze Zahlen. Eins und Eins zusammen genommen nennt man Zwei, Zwei und Eins zusammen heißt Drei, u. s. w, Wenn ein Sternchen das Eins bezeichnet, so kann man sich die Benennung und die Größe oder den Werth der ersten ganzen Zahlen, wie sie nach und nach aus der Zusammensetzung des Eins entstehen, also veranschaulichen:

Eins *

Zwei * *

Drei * * *

Vier * * * *

Fünf * * * * *

Sechs * * * * * *

Sieben * * * * * * *

Acht * * * * * * * *

Neun * * * * * * * * *

Zehn * * * * * * * * * *

Nun fängt man wieder von vorne an und zählt: Zehn und Eins, wofür man aber kürzer Eilf sagt; Zehn und Zwei, wofür Zwölf gesagt wird; Zehn

und Drei, wofür Dreizehn; ferner Vierzehn, Funfzehn u. s. w. bis man auf Zehn und Zehn kommt, wofür man Zwanzig sagt. Von hier zählt man weiter: Ein und zwanzig, Zwei und zwanzig u. s. w. Dreimal Zehn heißt Dreißig, viermal Zehn Vierzig u. s. w. Zehnmal Zehn heißt Hundert; zehnmal Hundert gibt Tausend; tausendmal Tausend nennt man eine Million; millionenmal Million heißt eine Billion; millionenmal Billion gibt eine Trillion u. s. w.

§. 3. Die neun ersten Zahlen heißen Einer oder einfache Einheiten; die Zahlen von Zehn bis Neunzig heißen Zehner, von Hundert bis Neunhundert Hunderte, von Tausend bis Neuntausend Tausende u. s. w. Man pflegt die Zahlen auch nach Ordnungen einzutheilen, und rechnet die Zehner zur ersten Ordnung, die Hunderte zur zweiten u. s. w. Man sieht leicht ein, daß die Einheit jeder höhern Ordnung zehn Einheiten der nächstniedrigern in sich begreift, z. B. 1 Zehner enthält 10 Einer, 1 Hunderter 10 Zehner, 1 Tausender 10 Hunderte, u. s. w.

§. 4. Zur Bezeichnung der verschiedenen Zahlen hat man gewisse Zeichen, die man Ziffern nennt; diese sind für die neun ersten Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Durch eben diese Ziffern können aber auch alle höheren Zahlen ausgedrückt werden. Dieß geschieht dadurch, daß die Ziffern durch die Stelle, in der sie stehen, von der Rechten gegen die Linke einen immer zehnmal größern Werth erhalten, als in der nächstvorhergehenden. In der ersten Stelle zur Rechten stehen die Einer; in der zweiten von der Rechten gegen die Linke stehen die Zehner; in der dritten die Hunderte; in der vierten die Tausende;

in der fünften die Zehntausende; in der sechsten die Hunderttausende; in der siebenten die Millionen; in der achten die Zehnmillionen u. s. w. Die 13te Stelle nehmen die Billionen, und die 19te die Trillionen ein. Wenn Einheiten einer gewissen Ordnung in einer Zahl, wo doch Einheiten von einer höhern Ordnung vorkommen, fehlen: so bezeichnet man die Stelle der fehlenden Einheiten mit 0 (Null).

§. 5. Diesemnach wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Zahlen aussprechen, und vorgesprochene niederschreiben können. So bedeutet 8 acht, und 82 achtzig und zwei d. i. zwei und achtzig. 825 ist achthundert und fünf und zwanzig; dagegen 805 achthundert und fünf; denn die Null in der zweiten Stelle von der Rechten gegen die Linke zeigt an, daß keine Zehner vorhanden sind. 8476 ist acht tausend, vierhundert und sechs und siebenzig; dagegen 8070 acht tausend und siebenzig; nämlich die erste Null von der Rechten an bedeutet, daß keine Einer, und die in der dritten Stelle sagt, daß keine Hunderte da sind. 12538 ist zwölf tausend, fünf hundert und acht und dreißig, und 904603 ist neunhundert und viertausend, sechshundert und drei. Vor Allem übe man sich, 6 Ziffern aussprechen zu können. Denn die Ziffern nach der 6ten Stelle gegen die Linke werden gleichsam als für sich bestehend betrachtet, nur daß sie die Millionen bezeichnen; eben so die Ziffern nach der 12ten Stelle, welche Billionen bezeichnen u. s. w. Zur Erleichterung mache man über die 7te Ziffer von der Rechten einen Strich oder Punkt zur Bezeichnung der Millionen, über die 13te Ziffer zwei Striche oder Punkte für die Billionen, über die 19te Ziffer drei für die Trillionen u. s. f. Z. B. die Zahl

1270833200498520046

wird ausgesprochen: Zwölf Trillionen, sieben Hundert und acht Tausend drei Hundert und zwei und dreißig Billionen, vier Tausend neun Hundert und fünf und achtzig Millionen, zweimalhundert Tausend vier Hundert und vier und sechzig. Solche Unterscheidungen der Zahlenwerthe durch Striche oder Kommate (,) anzuzeigen, wie häufig geschieht, ist nicht rathsam, weil solche Striche oder Kommate, wie wir später bei den Decimalbrüchen sehen werden, schon eine andere Bestimmung und Bedeutung haben. Nicht räthlich ist also folgende Bezeichnungsart: **92,348** oder **7,893,412.**

Man liest und hört auch von Milliarden. Dieß sind Tausende von Millionen. Nach dieser Art zu zählen heißt die folgende Zahl

**312544807638**

dreihundert und zwölf Milliarden, fünf hundert und vier und vierzig Millionen, acht hundert und sieben tausend, sechs hundert und acht und dreißig.

§. 6. Das Verfahren, Zahlen auszusprechen und zu schreiben, heißt das Numeriren; und die besondere Art und Weise, alle Zahlen durch Ziffern auszudrücken, ein Zahlensystem. Das bei uns und bei allen mehr oder minder gebildeten Völkern eingeführte System wird das zehntheilige, oder dekadische genannt, weil nach demselben immer zehn Einheiten einer niedrigern Ordnung auf die nächsthöhere gehen. Dadurch erhält jede Ziffer durch die Stelle, in der sie steht, von der Rechten gegen die Linke einen immer zehnmal größern Werth als in der nächstvorhergehenden Stelle.

§. 7. Man kann sich jede Einheit und jede Größe als ein Ganzes vorstellen, z. B. 1 Pfund, 1 Gulden. Durch Wiederholung der Einheit entstehen die ganzen Zahlen, z. B. 1 Pfund, 6mal genommen, gibt 6 Pfunde. Eben so sind 8 Lothe, 12 Kreuzer, ohne Bezug auf andere Größen betrachtet, ganze Zahlen; aber in Bezug auf Pfunde sind 8 Lothe nur Theile von 1 Pfund, weil 32 Lothe erst 1 Pfund ausmachen; und 12 Kreuzer sind in Bezug auf 1 Gulden nur Theile von 1 ganzen Gulden; denn 60 Kreuzer betragen erst 1 Gulden. Solche Zahlen, welche einen oder mehre Theile einer Einheit oder eines Ganzen ausdrücken, heißen gebrochene Zahlen oder Brüche, von welchen in einem besondern Kapitel wird gehandelt werden.

§. 8. Mit den Zahlen können insbesondere vier Hauptverrichtungen vorgenommen werden, nämlich: das Verfahren, mehre gegebene Zahlen in einer einzigen auszudrücken oder in Eine Zahl zu vereinigen, welche so viele Einheiten enthält, als die einzelnen Zahlen zusammen genommen haben, heißt die Addition; diejenige Zahl, welche allen zusammen genommen gleich ist, heißt die Summe, und jene einzelne Zahlen heißen Summanden (Zuzählungszahlen). Das Verfahren, eine Zahl so oft oder so vielmal zu nehmen, als eine andere Zahl anzeigt, heißt die Multiplikation; die erste Zahl heißt der Multiplikand, die zweite der Multiplikator, beide Zahlen heißen auch Faktoren, und die durch Multiplikation gefundene Zahl nennt man das Produkt. Eine andere Erklärung der Multiplikation heißt: aus einer Größe, dem Multiplikanden, eine neue Größe, das Produkt, eben so entstehen lassen, wie der Mul-

tiplikator aus Eins entstand. Wenn von einer Zahl so viele Einheiten weggenommen werden, als eine andere Zahl anzeigt, so heißt dieses Verfahren die Subtraktion oder das Abziehen, Wegnehmen, Aufheben; diejenige Zahl, von welcher der Abzug geschieht, heißt der Minuend; diejenige, welche abzieht, der Subtrahend; was übrig bleibt, nennt man den Rest, den Unterschied, auch die Differenz. Oder: eine Zahl von einer andern wegnehmen heißt eine dritte Zahl finden, welche den Unterschied jener zwei Zahlen angibt. Eine Zahl (den Dividenden) durch eine andere (den Divisor) dividiren heißt jene erstere in so viele gleiche Theile theilen, als die andere Einheiten hat; oder von der erstern Zahl die zweite so oft wegnehmen, als diese in jener enthalten ist; oder durch die Division findet man, wie vielmal eine Zahl (der Divisor) in einer andern (dem Dividenden) enthalten ist. Die gefundene Zahl nennt man den Quotienten. In jedem Fall ist der Dividend ein Produkt, welches den Divisor und Quotienten zu seinen Faktoren hat, so daß entweder der Divisor mit dem Quotienten oder dieser mit jenem multiplicirt den Dividenden zum Produkte geben muß.

Diese genannten Rechnungsarten sind unter dem Namen der 4 Species der Rechenkunst bekannt.

§. 9. Für die gedachten Rechnungsarten hat man auch gewisse Zeichen eingeführt. So ist das Zeichen der Addition ein stehendes Kreuz (+), welches man zwischen die zu addirenden Zahlen setzt, und das Zeichen, daß ein Zahlenausdruck einem andern gleich sei, sind zwei Querstriche (=). Z. B. $8 + 4 = 12$ bedeutet: 8 und 4 ist gleich oder so viel als 12. Das Zeichen

der Subtraktion ist ein Querstrich (—), welchen man zwischen den Minuend und Subtrahend setzt, z. B. $13 - 7 = 6$ liest man: 13 weniger 7 ist gleich 6, oder 7 von 13 bleibt 6. Das Zeichen der Multiplikation ist ein Punkt oder ein liegendes Kreuz (. oder ×), z. B. $3 \cdot 6 = 18$ oder $3 \times 6 = 18$ bedeutet: 3 durch 6 multiplicirt ist gleich 18. Für die Division gebraucht man den Doppelpunkt oder einen Querstrich (: oder —), z. B. $24 : 8 = 3$ oder $\frac{24}{8} = 3$ heißt: 24 durch 8 dividirt ist gleich 3. Man übersehe hiebei nicht, daß der Dividend immer vor dem Doppelpunkt und der Divisor nach demselben gesetzt werden müsse; welches von vielen Rechnern vernachlässigt oder verkehrt gemacht wird.

---

## Die Addition.

§. 10. Aufgabe: Verschiedene Zahlen zu addiren oder zusammen zu zählen.

Auflösung. 1. Man schreibe die Zahlen so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe einen Strich darunter.

2. Nun zähle man alle in der ersten Reihe rechter Hand d. h. in der Reihe der Einer befindlichen Zahlen zusammen und setze die Menge der Einer unterhalb des Striches unter die Einer; die Zehner, Hunderte u. s. w. aber, die sie etwa noch enthält, werden zu den Zehnern, Hunderten u. s. w. gezählt und müssen daher im Sinne behalten oder über dem Strich zu den Zehnern, Hunderten hingeschrieben werden.

3. Hierauf zähle man alle Zahlen der zweiten

Reihe d. i. der Zehner mit den aus der ersten Reihe im Sinne behaltenen oder über den Strich hingeschriebenen zusammen. Wenn die Summe derselben aus mehr als einer Ziffer besteht, so enthält die niedrigste die Zehner, welche unterhalb des Striches unter die Zehner gesetzt wird; die zweite Ziffer sind Hunderte, die dritte Tausende, welche daher auch zu den Hunderten, Tausenden u. s. w. gezählt werden müssen. Sie werden demnach im Sinne behalten oder sogleich oberhalb des Striches zu ihren Reihen gesetzt.

4. Alsdann zähle man die Zahlen der dritten Reihe d. i. der Hunderte nebst den aus der vorigen Reihe im Sinne behaltenen oder ausdrücklich hingeschriebenen Zahlen zusammen. Die Hunderte dieser Reihe zusammen schreibe man unter die Hunderte; aber die Tausende, Zehntausende, die etwa in derselben Reihe enthalten sein möchten, zähle man zu ihren zugehörigen Ordnungen, wie vorhin.

5. Und so fahre man fort, bis man zur letzten Reihe d. i. zur höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen kommt, deren Summe dann ganz hingeschrieben wird.

Nachstehendes Beispiel ist so gerechnet, einmal, daß die aus einer Reihe in die andere überzutragenden Zahlen einschließungsweise hingeschrieben sind; das anderemal so, daß man sie im Sinne behält:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 | 0 | 3 | 8 | 4 | 60384 |
| | | | 7 | 2 | 3 | 3 | 7233 |
| | | 8 | 6 | 1 | 1 | 0 | 86110 |
| | | | | 5 | 3 | 9 | 539 |
| | | | | | 1 | 8 | 18 |
| | | | 5 | 2 | 0 | 4 | 5204 |
| | | (1) | (1) | (1) | (2) | | 159488 |
| Summe | 1 | 5 | 9 | 4 | 8 | 8 | |

Aus der Art des Verfahrens erhellet zugleich die Richtigkeit desselben. Denn bei der Addition will man wissen, wie viel Einer, Zehner, Hunderte 2c. 2c. mehre einzelne Zahlen ausmachen; und dieß wird durch obiges Verfahren bewerkstelliget.

§. 11. Um sich zu überzeugen, daß man sich im Zusammenzählen nicht geirrt habe, ist es gut, das nämliche Beispiel zweimal, nämlich einmal aufwärts, das anderemal abwärts, zu rechnen. Eine andere Probe kann erst bei der Subtraktion gezeigt werden.

§. 12. Zur Uebung im Addiren mögen folgende Beispiele dienen. Es sollen nämlich folgende Zahlen zusammengezählt oder addirt werden:

I.

1) 2154, 1023, 530, 1343, 3213, 225, 36, 100.

2) 345, 110, 538, 248, 150, 312, 475, 590, 246, 687, 324, 109.

3) 12345, 21234, 36521, 15413, 43652, 10166, 57074, 36847, 25789, 40658.

4) 3457, 5365, 1276, 3548, 4789, 2676, 6396 8878, 1559, 5788, 2667, 7869, 3477, 6796, 5388, 6659, 1967, 4875, 3798, 5689.

5) 24730, 65064, 8697, 52478, 70956, 46589, 5045, 37853, 798, 84095, 60474, 89, 8960, 57498.

6) 483256, 358767, 197689, 546876, 260518, 315961, 507897, 488689, 156413, 646768, 112576, 504689, 387067, 798636, 132108, 112576, 569879, 216487, 651966, 420798, 158643, 507889.

7) 3705, 1343, 617, 135, 8745, 456, 119, 45, 5584, 9783, 4, 60, 138, 12, 14803, 27, 60390, 24781, 22354.

8) 421, 3276, 121, 840, 3268, 70093, 1740,

968, 4355, 24067, 1842, 5972, 9176, 100, 82, 7, 13, 444, 7828.

9) 21744, 33, 1234, 8155, 616, 3268, 18514, 73, 5, 916, 23, 7046, 634152, 119, 308, 5106, 771, 35087.

10) 651423, 89102, 1243, 818, 20, 6, 54, 371, 3482, 50800, 315611, 49712, 8430, 918, 81, 6.

11) 375, 8528, 6885, 797, 9394, 2195, 73, 99, 8774, 83, 66425, 484, 30674, 3748, 75, 4, 299, 638.

12) 15429, 368, 75, 2186, 347, 88, 40737, 54, 3818, 8196, 38, 255, 724, 136, 2831, 506, 198, 3449, 8007, 665, 21157, 9406, 3192 730894.

## II.

13) 125, 72, 80403, 761045, 38, 89, 2714, 313.

14) 817, 312, 6127, 1533, 91, 66, 71004, 28016, 610277.

15) 281964, 242372, 90041, 872731, 45607, 890123, 514243, 8812451, 648, 5074.

16) 734108, 121307, 4923, 7915, 6034802, 13246587, 2803, 41352, 16043.

17) 936410, 72583, 4436, 5611, 374, 86, 6, 12, 304, 8127, 51403, 822715.

18) 2683, 5067, 36893, 5776, 30894, 7267, 34372, 12186, 35097, 6159, 1002, 3719, 6827, 4218, 3169, 5808, 4606, 21418.

19) 7003, 218, 435, 1848, 913, 754, 6725, 1872, 3047, 621, 62543, 13242, 825.

20) 41263, 8147, 7681, 32004, 8721, 305, 18, 23, 620, 7224, 34800, 5254, 162, 3430, 1883.

21) 975, 796, 86, 1905, 72447, 9546, 8264, 64099, 136389, 35930, 8674, 953, 6, 87, 2796, 105, 26039, 49576, 68945, 3596.

22) 3845, 767, 13, 421, 5998, 946, 1132, 79, 12800, 5458, 2391, 6378.

23) 6, 45, 134, 2308, 50488, 760552, 1234567, 918273, 80042, 6731, 389, 42, 8.

24) 54783, 118, 20356, 929046, 819, 7623, 402133, 1840623, 7, 33148, 54, 921, 66, 50287, 8706648, 6424, 12706, 1822.

## III.

25) 437, 8205, 26, 17, 347, 56029, 1432, 719372.

26) 820356, 27705, 8424, 713, 42, 1, 82, 423, 7074, 13725, 510026.

27) 3419, 6080, 457, 12, 37216, 17645, 80047, 515208, 123745, 268, 910478, 3342, 688, 971.

28) 48, 215, 5122, 9408, 26207, 32, 8, 17, 4277, 3040, 218, 1776, 1554, 85, 254.

29) 6755, 3084, 725, 817, 37, 92, 4, 8, 36, 73, 502, 720, 2372, 1056.

30) 5, 13, 602, 3144, 97856, 230389, 72045, 8237, 982, 16, 8, 787358.

31) 7201023, 4857290, 25459, 3213, 441, 3072, 876, 5120217, 16, 25, 802, 132546.

32) 345408, 723306, 214, 521, 38, 4321, 7104, 1812, 3072, 147, 22, 62053.

33) 723, 18564, 6034, 1236, 405, 731, 6708, 592, 7, 14, 273, 1075, 3872, 53, 3824, 653421.

34) 8273, 50417, 586, 93, 207, 358, 723, 4009, 7258, 62701, 835, 1234.

35) 97218, 60271, 38004, 26081, 69217, 33510, 23581, 18075, 36912, 88130.

36) 7432, 80972, 55, 312, 78, 4591, 57273, 9283, 427, 98, 762, 32104, 365, 20407.

---

## Die Subtraktion.

§. 13. Aufg. Eine kleinere Zahl von einer größern zu subtrahiren oder wegzunehmen.

Aufl. Man schreibe die kleinere Zahl so unter die größere, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderte unter Hunderte u. s. w. zu stehen kommen, und ziehe dann einen Strich.

Hierauf nehme man die Einer des Subtrahends von den Einern des Minuends weg und setze den Rest unterhalb des Striches unter die Einer; eben so verfahre man mit den Zehnern, Hunderten, Tausenden u. s. w. bis zur letzten oder höchsten Ordnung der gegebenen Zahlen: so wird der Aufgabe ein Genüge geschehen.

Wenn eine untere Zahl größer sein sollte als eine obere, und also der Abzug nicht geradezu geschehen kann: so borge man in der nächsthöhern Ordnung des Minuends eine Einheit oder 1. Diese gibt, wie man (aus §. 3) weiß, 10 Einheiten für die Stelle, für welche geborgt wird; man addire also diese 10 zu dieser Stelle und man wird dann immer abziehen können.

Damit man es nicht übersehe und vergesse, daß von der nächstfolgenden Ziffer eine Einheit geborgt worden und sie also um 1 verringert ist, so kann man diese Ziffer mit einem Punkt bezeichnen.

Ereignet es sich, daß die Ziffer, von der eine Einheit geborgt wird, eine Null (0) ist: so muß diese selbst erst von der nächsthöhern Ordnung eine Einheit für sich borgen. Dadurch wird die Null zu 10 und weil eine Einheit für die nächstniedrige Ziffer abgegeben wird, so bleiben an der Stelle der Null nur noch 9 Einheiten übrig. Eben so verhält es sich auch, wenn mehre Nullen nach einander folgen. Beispiele:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Minuend | 835764 | | 1562388 |
| Subtrahend | 611352 | | 725417 |
| Rest | 224412 | Rest | 836971 |

| | |
|---|---|
| 4526082 | 78062004 |
| 632493 | 741536 |
| 3893589 | 77320468 |

§. 14. Wenn man zu einem Rest die Zahl wieder hinzufügt, die man von einer gewissen Summe weggenommen hatte: so muß nothwendig die vorige Summe wieder zum Vorschein kommen. Man addire also zum Rest den Subtrahenden; und es wird der Minuend herauskommen. Dieß dient als Probe der Subtraktion. Z. B.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 218045 | | | 650047 | |
| | 137846 | addirt | | 138229 | addirt |
| Rest | 80199 | addirt | Rest | 511818 | addirt |
| | 218045 | | | 650047 | |

§. 15. Die Subtraktion dient aber auch der Addition zur Probe, dadurch, daß, wenn man die Hauptsumme gefunden hat, man die summirenden Zahlen nochmals addirt, aber eine von ihnen, z. B. die oberste, wegläßt, und nun diese Theilsumme von der Hauptsumme abzieht. Der Rest muß die weggelassene Zahl geben. Z. B.

| | |
|---|---|
| 730852 | |
| 66109 | |
| 31074 | |
| 342 | |
| 828377 | Hauptsumme |
| 97525 | Theilsumme |
| 730852 | Rest, wie die weggelassene Zahl. |

§. 16. Beispiele zur Uebung, in welchen, wie sich's gebührt, zur Linken des Querstriches (—) der Minuend und zur Rechten der Subtrahend steht.

I.

1) 648537 — 413213 gibt zum Rest
2) 126438 — 42736 gibt
3) 8153766 — 2356148
4) 27035 — 18374
5) 7034082 — 2641704
6) 2107004 — 832705
7) 1090034 — 98472
8) 40039286 — 3150679
9) 1214805 — 605286
10) 6010109 — 4305079
11) 86041070 — 68050420
12) 500708105 — 341065608

II.

13) 54300000 — 9421008 gibt zum Rest
14) 5010101010 — 3905010110
15) 784898 — 243546; 16) 780928 — 483051
17) 46866 — 38259; 18) 145630 — 60076
19) 48953478 — 47830892; 20) 3690026 — 3572519
21) 4203142 — 63278; 22) 1834906 — 827740
23) 72050763 — 87969; 24) 50706481 — 39697845

III.

25) 872569 — 341226; 26) 43782 — 6092
27) 30467812 — 27180904
28) 6200483 — 986754; 29) 563072 — 372985
30) 118700035 — 270896
31) 708200008 — 539644; 32) 625078290 — 19283
33) 48126140 — 47602800
34) 63891022 — 63807958; 35) 12400023 — 9074856
36) 250300812 — 76125589.

## Die Multiplikation.

§. 17. Ehe man zum Multipliciren schreitet, muß man sich mit dem sogenannten Ein mal Eins bekannt machen, welches die Produkte aller einfachen Zahlen oder der Einer enthält und in folgendem Täfelchen dargestellt ist:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Das Produkt von zwei einfachen Zahlen findet man immer da, wo die lothrechte und wagrechte Reihe durch beide Zahlen sich schneiden, z. B. 6 . 8 = 48 und 8 . 6 = 48; woraus zugleich erhellet, daß einerlei Produkt herauskommt, wenn gleich die Faktoren ihre Stellen verändern, wie hier 6 . 8 und 8 . 6 immer 48 geben.

§. 18. Aufg. Eine jede Zahl mit einer einfachen Zahl zu multipliciren.

Aufl. Von der Rechten gegen die Linke anfangend mache man die Produkte einer jeden Ziffer des Multiplikanden in den Multiplikator, setze die niedrigste Ziffer eines jeden einzelnen Produktes in eben die Stelle, wo die Ziffer des Multiplikanden stehet, und addire die höchste Ziffer, welche etwa noch vorkommt, zum nächstfolgenden Produkte. Z. B.

7012045 Multiplikand
6 Multiplikator

42072270 Produkt.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird man aus folgender Betrachtung erkennen. Indem man die 5 Einer des Multiplikanden 6mal nimmt, erhält man 30 Einer d. i. 3 Zehner und keinen Einer. Die Null unter dem Strich zeigt an, daß keine Einer vorhanden sind; die 3 Zehner aber sind natürlich zu den folgenden Zehnern gezogen worden, nämlich 4 Zehner 6mal genommen geben 24 Zehner, und 3 Zehner aus den vorigen Einern dazu, machen 27 Zehner, d. i. 2 Hunderte und 7 Zehner. Die 7 Zehner sind unter die Zehner gesetzt worden, und die 2 Hunderte kommen zu den Hunderten. Hier aber sollen gar keine Hunderte genommen werden ($6 . 0 = 0$); darum wurden die 2 aus den Zehnern entstandenen Hunderte geradezu an ihre Stelle gesetzt. 2 Tausende 6mal genommen geben 12 Tausende d. h. 1 Zehntausender und 2 Tausende; diese sind unter den Tausenden bemerkt, und jene zu den Zehntausenden addirt worden; nämlich 1 Zehntausender 6mal genommen gibt 6 Zehntausende und 1 aus den vorigen gewonnen macht 7 Zehntausende, die man an ihrer Stelle findet. Hunderttausende sollen gar nicht genommen werden; dieß ist durch eine Null an ihrem Orte bemerkt worden. 7 Millionen sollen 6mal genommen werden; dieß gibt 42 Millionen, welche auch ihren Platz erhalten haben.

Man könnte das ganze Verfahren auch versinnlichend darstellen auf folgende Weise

```
      58736
          5
   ---------
        30  Einer
       15   Zehner
      35    Hunderte
     40     Tausende
    25      Zehntausende
   ---------
    293680  Produkt.
```

§. 19. Aufg. Eine jede Zahl mit einer jeden andern zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach der Reihe die einzelnen Ziffern des Multiplikanden, wie vorhin, erstlich in die Einer, dann in die Zehner, Hunderte des Multiplikators u. s. w., nur daß man die einzelnen Produkte immer um eine Stelle weiter zur Linken rückt, so oft man mit einer höhern Stelle des Multiplikators zu multipliciren anfängt, so daß allemal die niedrigste Ziffer eines jeden Produkts unter diejenige Ziffer des Multiplikators, von welcher das Produkt herrührt, zu stehen kommt.

Wenn daher in dem Multiplikator Nullen vorkommen, so muß man die Produkte auch wegen einer jeden Null um eine Stelle weiter fortrücken.

Am Ende addire man alle einzelne Produkte zusammen, so erhält man das ganze Produkt der beiden gegebenen Zahlen. Beispiele:

```
   150874              42187
      359               6032
 ----------        -----------
  1357866              84374
  754370             126561
 452622             253122
 ----------        -----------
 54163766          254471984
```

Das stufenfolge Einrücken der einzelnen Produkte erklärt sich, wenn man ein Beispiel vollständig rechnet und hinschreibt, also:

```
     150874
        359
  ---------
    1357866 das Neunfache
    7543700 das Fünfzigfache
   45262200 das Dreihundertfache
  ---------
   54163766
```

§. 20. Wenn der Multiplikand und der Multiplikator am Ende Nullen haben, so braucht man nur die geltenden Ziffern, wie bisher, unter einander zu schreiben, und dann wie vorhin zu verfahren. An das Produkt werden dann so viele Nullen gesetzt, als beide Faktoren zusammen genommen haben. Z. B.

```
 1093000           913200
      80            17000
 --------      -----------
 87440000           63924
                    9132
               -----------
               15524400000
```

§. 21. Der Anfänger mag sich noch in folgenden und andern Beispielen üben:

I.

1) 5827366 × 2 gibt zum Produkt
2) 456218 × 3 gibt
3) 1723586 × 4; 4) 3872149 × 7
5) 840932 × 9; 6) 583142 × 12
7) 79530 × 26; 8) 14917 × 48
9) 79406 × 71; 10) 6042097 × 86
11) 28451 × 265; 12) 79626 × 456
13) 92780 × 460; 14) 236489 × 2662
15) 6894000 × 3456; 16) 12340 × 12340
17) 543 × 61258; 18) 734008170 × 2003906

II.

19) 632584 × 3 gibt zum Produkt

20) 1748172 × 5 gibt

21) 520646 × 8; 22) 41376 × 14; 23) 671083 × 55

24) 24100874 × 92; 25) 34197 × 238

26) 576800 × 799; 27) 740236 × 906

28) 37059 × 8010; 29) 1020030 × 4237

30) 8254090 × 63180; 31) 689400 × 34560

32) 100026 × 50067; 33) 9833 × 482756

34) 154706 × 517190; 35) 6045310267 × 4003081

36) 48537090 × 62800974

III.

37) 68452 × 2; 38) 503876 × 4

39) 2706328 × 7; 40) 3487050 × 16

41) 760543 × 49; 42) 1230788 × 780

43) 51872572 × 315; 44) 83278649 × 608

45) 24035083 × 987; 46) 87005621 × 3748

47) 467985304 × 5039; 48) 213587260 × 8765

49) 3700409 × 32718; 50) 78253 × 75849

51) 6057382 × 93805; 52) 63758487 × 451328

53) 47823040 × 8934700

54) 82500975 × 32154659

55) 8132890215 × 5745493

56) 11467399786 × 723729167.

---

## Die Division.

§. 22. **Aufg.** Eine jede Zahl durch eine einfache zu dividiren.

**Aufl.** Man schreibe den Divisor zur Linken neben den Dividenden, und suche zur Rechten den Quotienten auf folgende Weise: Man vergleiche den Divisor mit der höchsten Ziffer des Dividenden, oder,

wenn diese kleiner als der Divisor ist, mit den zwei höchsten Ziffern desselben, und untersuche, wie oft er darin enthalten ist. Die Zahl, die dieses Vielfache anzeigt, gibt die höchste Ziffer des zu suchenden Quotienten. Mit ihr multiplicire man nun den Divisor; ziehe das Produkt von den Ziffern des Dividenden ab, mit welchen der Divisor verglichen wurde, und schreibe den Rest, wenn einer übrig bleibt, darunter.

Nun nehme man die nächstniedrigere Ziffer des Dividenden zur Rechten, setze sie unter den Strich und zwar rechts neben den etwa gebliebenen Rest, untersuche wiederum, wie vielmal der Divisor in der dadurch erhaltenen Ziffer steckt. Die Zahl, welche dieses Vielfache anzeigt, gibt die nächstniedrigere Ziffer des Quotienten. Mit ihr multiplicire man den Divisor und ziehe das Produkt von der verglichenen Zahl ab.

Zu dem etwaigen Reste bringe man die folgende Ziffer des Dividenden und behandle diese Zahl, so wie jeden folgenden Rest und die dazu genommene Ziffer des Dividenden, wie die vorhergehenden Zahlen, bis man jede Ziffer des Dividenden mit dem Divisor verglichen und auf diese Weise alle Ziffern des Quotienten nach und nach gefunden hat.

Wenn bei einer Subtraktion kein Rest übrig bleibt, und die heruntergebrachte Ziffer des Dividenden kleiner als der Divisor ist, folglich in ihr der Divisor gar keinmal steckt: so schreibe man eine Null an die zugehörige Stelle des Quotienten. Hierauf nehme man die nächstfolgende Ziffer des Dividenden herab und verfahre wie vorhin. Beispiele:

```
1) Divisor|Dividend|Quot.        2) Divis.|Divid.|Quot.
     2    |  730   | 365              8   |23264 | 2908
             6                            16
           ----                          ----
            13                            72
            12                            72
           -----                         -----
             10                            64
             10                            64
            ----                          ----
              *                             *

Divisor |Dividend |Quotient
   5    |513840   |(102768       7|30461725 (4351675
        |5                        |28
      -----                       -----
         13                         24
         10                         21
        -----                      -----
          38                         36
          35                         35
         -----                      -----
           34                         11
           30                          7
          -----                      -----
            40                         47
            40                         42
           ----                       -----
              *                          52
                                         49
                                        -----
                                          35
                                          35
                                         ----
                                           *
```

Das richtige Verfahren der Division erhellet aus folgender vollständiger Darstellung des ersten Beispiels:

```
   2|730   (300)
     600     60} addirt
   -----      5)
     130   -----
     120    365 wie vorhin.
    -----
      10
      10
    -----
       *
```

Nämlich 2 ist in 730 offenbar 300mal enthalten und $2 \times 300 = 600$. Dieß von 730 abgezogen gibt 130 zum Rest. In 130 ist 2 nur 60mal enthalten und $2 \times 60 = 120$; welches von 130 abgezogen 10 zum Rest läßt. In 10 ist 2 nur noch 5mal enthalten und $2 \times 5 = 10$ von 10 abgezogen, geht Alles auf.

Dasselbe erkennt man an dem zweiten Beispiele:

```
8|23264   (2000)
  16000    900 |
  -----        } addirt
   7264     00 |
   7200      8)
  ------------
     64   2908  wie vorhin.
     64
  ------
```

Nämlich 8 ist in 23264 nur 2000mal enthalten, weil 3000 . 8 schon 24000 ausmachen; aber $8 . 2000 = 16000$; diese werden von 23264 abgezogen, bleibt zum Rest 7264. Weil in diesem Rest die Zahl 8 mehre hundertmal steckt, nämlich 900mal, so wird abermals das Produkt $8 . 900 = 7200$ von der Zahl 7264 abgezogen; und es bleibt zum Rest 64. Nach den Hunderten ist nachzusehen, ob auch 8fache Zehner im Reste 64 enthalten sind. Allein schon ein Zehner 8mal genommen (d. i. $8 \times 10 = 80$) gibt 80. Also ist in 64 die Zahl 8 kein 10mal enthalten, was daher durch Nullen in der Stelle der Zehner bemerkt worden ist; wohl aber sind mehre Einheiten, nämlich 8, in 64 enthalten. Das Produkt $8 . 8 = 64$ wird dann gar abgezogen.

§. 23. Aufg. Eine gegebene Zahl durch eine jede andere kleinere zu dividiren.

Aufl. Man vergleiche anfangs den Divisor entweder mit dem aus eben so vielen höchsten Ziffern bestehenden Theile des Dividenden, oder, wenn dieser

Theil kleiner als der Divisor ist, nehme man noch eine Ziffer des Dividenden dazu; suche jetzt das Vielfache des Divisors, welches dem verglichenen Theile des Dividenden gleich oder am nächsten kommt, und die höchste Ziffer des Quotienten ist; und ziehe das Produkt dieses ersten Theils des Quotienten in den Divisor von den verglichenen höchsten Stellen des Dividenden ab. Uebrigens verfahre man hier völlig so, wie vorhin (§. 22).

Um jene Vergleichung anzustellen und das Vielfache des Divisors schneller und leichter zu finden, suche man nur, wie vielmal die höchste Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer oder, wenn diese kleiner ist, in den beiden höchsten Ziffern des Dividenden enthalten ist, und setzt voraus, der ganze Divisor stecke eben so oft in den ihm zugehörigen Ziffern. Diese Voraussetzung kann falsch sein; denn wenn man das Vielfache des Divisors nimmt, so wird häufig die erste Ziffer desselben durch das, was von den Vielfachen der nachfolgenden Ziffern zu ihr herübergetragen wird, vergrößert; indessen entdeckt sich der Fehler bald dadurch, daß das Vielfache des Divisors von dem verglichenen Theil des Dividenden nicht abgezogen werden kann. Alsdann muß man den gefundenen Theil des Quotienten so lange vermindern, bis der Abzug statt findet. — Umgekehrt, wenn irgend ein Rest so groß oder größer als der Divisor ist, so ist der Quotient zu klein genommen worden; also muß er vergrößert werden.

Wenn übrigens die heruntergenommene Ziffer des Dividenden noch keine Zahl gibt, welche gleichgroß oder größer als der damit zu vergleichende Divisor ist: so gebe man dem Quotienten eine Null für die

zugehörige Stelle, und bringe noch eine Ziffer des Dividenden herunter; wiederhole dieses so lange, bis man auf eine solche Zahl kommt. Beispiel:

| abgekürzt | vollständig |
|---|---|
| 167\|535068 (3204<br>501<br>———<br>340<br>334<br>———<br>668<br>668<br>———<br>* | 167\|535068 (3000<br>501000 200<br>———<br>34068 00<br>33400 4<br>——— ———<br>668 3204<br>668<br>———<br>* |

Nämlich zuerst wird der Divisor 167 mit 535 verglichen, und man findet, daß er in 535, womit die Tausende anfangen, 3 tausendmal enthalten ist. Zum Rest 34 läßt man die 0 herab, womit die Hunderte anfangen. In 340 Hunderten aber ist der Divisor 2 hundertmal enthalten. Dieß zeigt die Zahl 2 im Quotienten in der Stelle der Hunderte; so wie vorhin 3 die Stelle der Tausende einnahm. Läßt man nun die 6, welche Zehner bedeutet, herab: so bekommt man 66 Zehner, in welchen 167 offenbar gar keinmal steckt, was auch im Quotienten durch die Null an der Stelle der Zehner bemerkt ist. Nun nimmt man vollends die 8 Einer herab: dieß gibt 668 Einer, in welchen der Divisor gerade 4mal steckt. Aus dieser Betrachtung wird einem Jeden die Richtigkeit des Verfahrens beim Dividiren einleuchten.

§. 24. Kommen im Divisor und im Dividenden am Ende Nullen vor, so kann man gegen jede Null des Divisors eine Null des Dividenden wegstreichen, und alsdann dividirt man die beiden solchergestalt verkleinerten Zahlen nach den gewöhnlichen Regeln. Z. B.

2048Ø | 1253376000Ø | (612000
      | 12288
        2457
        2048
         4096
         4096
          000

§. 25. Wenn am Ende der Division ein Rest bleibt, so enthält der Dividend den Divisor ein oder mehremal ganz, und noch etwas von ihm darüber, welches keinen ganzen Divisor beträgt. Es wird ein Bruch (§. 7) sein, wovon im folgenden Kapitel wird gehandelt werden. Beispiel:

32 | 180567 (5642
   | 160
     205
     192
      136
      128
       87
       64
       23 Rest.

§. 26. Die Multiplikation und Division dienen einander wechselseitig als Probe. Denn da bei der Multiplikation der eine Faktor in dem Produkt so oft enthalten ist als der andere Faktor anzeigt, so darf man nur, um die Multiplikation zu prüfen, das gefundene Produkt durch einen der beiden Faktoren dividiren: und der Quotient wird den andern Faktor geben.

Will man die Division prüfen, so multiplicire man den Divisor mit dem gefundenen Quotienten und addire zu diesem Produkt den etwa gebliebenen Rest, und man wird wieder den Dividenden erhal-

ten. Denn der Quotient sagt aus, wie oft der Divisor in dem Dividenden enthalten ist.

§. 27. Zur Uebung mögen folgende Beispiele dienen, wobei zu bemerken ist, daß die Zahl vor dem Doppelpunkt (:) den Dividend, und die nach demselben den Divisor bezeichnet (vgl. §. 9).

## I.

1) 47361498 : 2 gibt den Quotienten
2) 1258341 : 3 gibt
3) 708159286 : 4; 4) 30210078 : 7
5) 23864118592 : 8; 6) 1765960 : 9
7) 38304 : 16; 8) 563004281750 : 25
9) 14799384 : 31; 10) 179829 : 87
11) 167770515 : 213; 12) 8796114 : 486
13) 1025133848 : 2558; 14) 1026056 : 4008
15) 586745600 : 7840; 16) 55575912 : 18168
17) 17251934000 : 157840
18) 3859132746 : 975962
19) 323782108052 : 6438172
20) 2396876003700 : 51796348

## II.

21) 638574 : 2 gibt den Quotienten
22) 8739088 : 4 gibt
23) 1625345 : 5; 24) 6714308 : 7
25) 32108496 : 8; 26) 55341 : 13
27) 582496 : 32; 28) 817596 : 78
29) 2067696 : 346; 30) 2847000 : 730
31) 73642044 : 987; 32) 6403023 : 3272
33) 970307328 : 6736; 34) 22195875563 : 38209
35) 1732693722 : 54123
36) 71030058448 : 321042
37) 462004000700 : 670505
38) 44101680016 : 210004

39) 36070483000 : 1803040
40) 93857833230 : 2305806

III.

41) 68358 : 3; 42) 78432 : 4; 43) 247625 : 5
44) 934703 : 7; 45) 283482 : 9; 46) 513408 : 12
47) 752150 : 25; 48) 7715088 : 36
49) 1074015 : 87; 50) 2891484 : 123
51) 28193400 : 345; 52) 17489724 : 708
53) 15556783 : 4178; 54) 59504041856 : 7808
55) 38617524180 : 52835
56) 795365845032 : 87576
57) 25683512056335 : 676839
58) 88697327840 : 3591712
59) 256946839156176724 : 372572917
60) 2375000449657784 : 4364370412

---

## Zweites Kapitel.

## Von den gemeinen Brüchen.

---

§. 28. Ein Ganzes kann man sich in mehre gleiche Theile getheilt denken. Eine Zahl nun, welche einen oder mehre solcher gleicher Theile ausdrückt, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Das Ganze, worauf sich diese Theile beziehen, kann man die Grundeinheit nennen. Zur vollständigen Bezeichnung eines Bruches braucht man zwei Zahlen: die eine, welche angibt, in wieviel gleiche Theile das Ganze oder die Grundeinheit getheilt ist, heißt der Nenner; die andere, welche anzeigt, wieviele solcher Theile genommen sind, heißt der Zähler. Man schreibt beide Zahlen unter einander, so daß der Zäh=

ler oben, der Nenner unten zu stehen kommt, und zwischen ihnen wird ein Strich gezogen. Z. B. Wenn ein Ganzes in 4 gleiche Theile getheilt und 3 davon genommen werden, so schreibt man $^3/_4$. Eben so bedeutet $^5/_7$, daß ein Ganzes in 7 gleiche Theile getheilt und davon 5 genommen sind. Man liest beide Zahlenausdrücke: Drei Viertel, Fünf Siebentel.

Man theilt die Brüche in ächte und in unächte. Erstere sind solche, welche kleiner als die Einheit sind oder deren Zähler kleiner als der Nenner ist, z. B. $^3/_5$, $^7/_8$, $^1/_2$. Letztere sind solche, bei welchen der Zähler größer als der Nenner ist und dieser in jenem nicht aufgeht, z. B. $^5/_2$, $^7/_3$, $^{15}/_8$. Ein Bruch heißt aber ein uneigentlicher, wenn der Zähler dem Nenner gleich oder größer als der Nenner ist und dieser in jenem aufgeht, z. B. $^6/_6$, $^{15}/_3$, $^{21}/_7$.

§. 29. Jeder Bruch läßt sich zugleich auch als ein Quotient betrachten, dessen Dividend der Zähler und dessen Divisor der Nenner des Bruches ist. Denn z. B. bei $^5/_8$ kann ich auch untersuchen, wie vielmal 8 (der Divisor) in 5 (im Dividenden) steckt. Offenbar aber steckt 8 auch nicht ein einzigmal in 5; vielmehr sind von den in 8 enthaltenen 8 Theilen nur 5 ein einzigmal in 5 enthalten d. h. die Zahl 8 steckt in 5 nur $^5/_8$ mal (Quotient). Darum haben auch die Brüche und die Quotienten ganz einerlei Bezeichnung.

§. 30. Der Rest, der am Ende einer Division übrig bleibt, ist daher der Zähler eines Bruches, dessen Nenner der Divisor ist. Dieser Bruch muß also noch zum Quotienten hinzugefügt werden, um diesen vollständig zu erhalten. In obigem Beispiele

der Division (§. 25) ist folglich der vollständige Quotient $5642^{23}/_{32}$.

§. 31. Darum findet man den Werth eines unächten und eines uneigentlichen Bruches in ganzen Einheiten, wenn man den Zähler durch den Nenner wirklich dividirt z. B. $^5/_5 = 1$ Ganzes, $^{18}/_3 = 6$ Ganze, $^{23}/_4 = 5^3/_4$ d. h. 5 Ganze und drei Viertel.

§. 32. Wenn man eines Bruches Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber ungeändert läßt: so wird der Bruch so vielmal größer, so viele Einheiten jene Zahl enthält. Denn dadurch ändert sich die Beschaffenheit der Theile nicht, sondern nur die Menge derselben, und die Größe des Bruches wächset mit der Menge der Theile.

Wird aber der Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt, und der Zähler unverändert gelassen: so wird der Bruch so vielmal kleiner, so viele Einheiten die ganze Zahl hat. Denn durch die Multiplikation des Nenners ändert sich die Beschaffenheit der Theile, welche kleiner werden, wenn der Nenner größer wird, und zwar um so vielmal kleiner, als die Zahl anzeigt, mit welcher man den Nenner multiplicirt. Da man nun der kleinern Theile nicht mehr nimmt, als vorher der größern: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als die Theile kleiner geworden sind, d. h. als der Nenner größer geworden ist.

§. 33. Hieraus folgt: Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerlei Zahl multiplicirt: so ändert sich nicht der Werth oder die Größe des Bruchs, sondern blos seine Form. Denn die Multiplikation in den Zähler vergrößert den Bruch so vielmal, als die Multiplikation in den Nenner den vergrößerten wieder verkleinert. Z. B. $^1/_2$ im Zähler

und Nenner durch 30 multiplicirt, gibt $^{30}/_{60}$ oder $\frac{1 \cdot 30}{2 \cdot 30} = {}^{30}/_{60}$. Ob also Jemand $^1/_2$ fl. (d. i. einen halben Gulden) hat, oder 30 solche Theile eines Gulden, der in 60 gleiche Theile getheilt ist d. i. 30 Kreuzer, das ist gleichviel. Eben so $\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = {}^{20}/_{35}$.

§. 33. Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, der Nenner aber ungeändert bleibt: so wird der Bruch so vielmal kleiner, als der Zähler kleiner geworden ist. Denn durch die Division des Zählers wird die Anzahl der Theile verkleinert, die Beschaffenheit derselben hingegen bleibt unverändert.

Wird aber bei unverändertem Zähler der Nenner eines Bruchs durch eine ganze Zahl dividirt: so wird der Bruch so vielmal größer, als der Nenner kleiner geworden ist. Denn durch die Verkleinerung des Nenners werden die Theile der Grundeinheit größer, und von diesen größern Theilen werden noch eben so viele, wie vorhin, genommen.

§. 35. Hieraus folgt: Ein Bruch bleibt in seinem Werthe unverändert, wenn Zähler und Nenner zugleich mit einerlei Zahl dividirt werden. Denn durch die erste Division wird der Bruch so vielmal verkleinert, als er durch die andere wieder vergrößert wird. Z. B. $^9/_{15}$ im Zähler und Nenner durch 3 dividirt gibt $^3/_5$ oder $\frac{9 : 3}{15 : 3} = {}^3/_5$. Es ist also gleichviel, ob jemand 9 Theile von einer Sache hat, die in 15 Theile getheilt ist, oder 3 Theile derselben Sache, wenn sie in 5 Theile getheilt ist. Ferner, man besitzt gleichviel Geld, man mag entweder $^3/_4$ fl. oder $^{45}/_{60}$ fl. d. i. 45 Kr. haben.

§. 36. Jede ganze Zahl läßt sich in einen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandeln, dessen Zähler den Nenner so vielmal enthält, so viele Einheiten in der ganzen Zahl stecken. Denn jede ganze Zahl läßt sich als ein Bruch betrachten, dessen Nenner = 1 ist z. B. $5 = {}^5/_1$; $12 = {}^{12}/_1$ u. s. w. Man darf daher nur Zähler und Nenner mit derjenigen Zahl multipliciren, welche den neuen Nenner anzeigt. Z. B. $7 = {}^7/_1 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 6} = {}^{42}/_6$; eben so $2 = {}^2/_1 = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} = {}^8/_4$. Und der Bruch oder die anfänglich gegebene Zahl bleibt (wegen §. 33) dem Werthe nach ungeändert.

§. 37. Einen Bruch *aufheben* heißt: ihn seiner Größe oder seines Werthes unbeschadet durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrücken.

Durch das Heben der Brüche kann nicht nur wegen der kleinern Zahlen die Rechnung vereinfacht und erleichtert werden, sondern durch dasselbe erhält man auch deutlichere Begriffe von dem Werthe oder der Größe der Brüche, z. B. $^1/_2$ Loth ist leichter zu verstehen als $^{16}/_{32}$ Loth, obgleich beide Brüche einerlei Werth haben. Indessen können nicht alle Brüche gehoben werden, sondern nur diejenigen, welche einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

§. 38. Eine Zahl, welche in eine andere Zahl, ohne daß ein Rest bleibt, dividirt werden kann, heißt das *Maaß* dieser Zahl. Eine Zahl, welche in verschiedenen andern Zahlen zugleich aufgeht, heißt das *gemeinschaftliche Maaß* oder der *gemeinschaftliche Theiler* aller dieser Zahlen.

Zahlen, welche durch kein anderes Maaß als durch sich selbst und durch die Einheit gemessen werden

können, heißen einfache Zahlen, Primzahlen oder Grundzahlen, z. B. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. s. w. Mehre Zahlen aber, welche unter sich keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, heißen Primzahlen unter sich z. B. 9, 4, 25 u. s. w.

Zahlen, welche ein Maaß haben, heißen vielfache oder zusammengesetzte Zahlen, z. B. 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18 u. s. w. Wenn aber zwei oder mehre Zahlen so beschaffen sind, daß sie ein gemeinschaftliches Maaß besitzen, so nennt man sie zusammengesetzte Zahlen unter sich. Das gemeinschaftliche Maaß, durch dessen Division die zusammengesetzten Zahlen unter sich zu Primzahlen unter sich werden, heißt das größte gemeinschaftliche Maaß oder der größte gemeinschaftliche Theiler jener Zahlen.

§. 39. Aufg. Das größte gemeinschaftliche Maaß oder den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, und wenn die Division nicht aufgeht, mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, und so fort, immer mit dem Rest in den vorhergehenden Divisor, bis man auf eine Division kommt, welche entweder gar keinen Rest oder 1 d. h. die Einheit zum Rest gibt.

Der letztere Fall zeigt an, daß die gegebenen Zahlen kein gemeinschaftliches Maaß haben; denn bei der Division durch das Eins (durch 1), welches in diesem Falle der gemeinschaftliche Divisor ist, wird der Quotient dem Dividenden gleich und kein neues Ergebniß gewonnen.

Wenn aber die Division ohne allen Rest aufgehet,

so wird der bei ihr gebrauchte letzte Divisor das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß der gegebenen Zahlen sein.

Beispiele: 1) Man soll für die Zahlen 1260 und 2016 das größte gemeinschaftliche Maaß suchen:

1260 | 2016 | 1
1260
756 | 1260 | 1
756
504 | 756 | 1
504
252 | 504 | 2
504
*

der letzte Divisor 252 ist das gesuchte größte gemeinschaftliche Maaß oder der größte gemeinschaftliche Theiler von 1260 und 2016, welcher in beide Zahlen ohne Rest aufgehen wird.

2) Das größte gemeinschaftliche Maaß der Zahlen 37 und 6513 zu finden:

37 | 6513 | 176
37
281
259
223
222
1

Da hier die Division 1 zum Rest gibt, so haben beide gegebene Zahlen keinen gemeinschaftlichen größten Theiler.

Der Grund des vorgeschriebenen Verfahrens liegt darin, daß, wenn eine Zahl in einer andern aufgeht, sie nicht nur in jedem Produkt derselben aufgeht,

sondern auch in jeder Zahl, die aus einem solchen Produkt und der Zahl, mit welcher man dividirt, zusammengesetzt ist. Wenn im ersten Beispiele 252 in 504 aufgeht, so geht es auch in 504 + 252 = 756; in 252 . 5 = 1260; und in 252 . 8 = 2016 auf; ferner in 756 + 504 = 1260 und in 1260 + 756 = 2016.

§. 40. Andere Beispiele zur Uebung sind folgende:

1) Welches ist das größte gemeinschaftliche Maaß oder der größte gemeinschaftliche Theiler von 504 und 5120?

2) von 37 und 2923? 3) von 136 und 187?
4) von 287 und 492? 5) von 318 und 371?
6) von 708 und 885? 7) von 3024 und 3528?
8) von 575 und 17342? 9) von 43134 und 269087?
10) von 134352 und 424980?
11) von 6709 und 356827?
12) von 24776 und 8253195?

§. 41. Aufg. Einen gegebenen Bruch aufzuheben.

Aufl. Man suche für Zähler und Nenner den größten gemeinschaftlichen Theiler und dividire beide damit. Der Quotient beim Zähler gibt den neuen Zähler; der Quotient beim Nenner gibt den neuen Nenner. Auch wird durch ein solches Verfahren der Werth des Bruches nicht im mindesten verändert (vermöge §. 35). Findet man kein gemeinschaftliches Maaß, so beweiset dieses, daß sich der gegebene Bruch nicht heben läßt.

Beispiel: Man soll den Bruch $^{1617}/_{4620}$ heben. Man wird das größte gemeinschaftliche Maaß 231 finden; da nun 1617 : 231 = 7 und 4620 : 231 = 20 ist, so ist der neue Bruch $^{7}/_{20}$. Man schreibt dieß also:

$$\overset{231}{\smile}$$

$$1617/4620 \mid 7/20.$$

Man kann auch so verfahren, daß man kleine schickliche, gemeinschaftliche Theiler nimmt, und mit diesen so lange dividirt, bis Zähler und Nenner Primzahlen sind. Das Produkt dieser kleinern Theiler wird dann dem größten gemeinschaftlichen Theiler oder Maaß gleich sein. So kann man in dem letzten Beispiele anstatt auf einmal mit 231 zu dividiren, nach und nach durch 3, 7, 11 dividiren. Dieser drei Zahlen Produkt gibt aber wieder die Zahl 231 oder $3 \,.\, 7 \,.\, 11 = 231$. Das Beispiel steht dann also aus:

$$1617/4620 \overset{3}{\mid} 539/1540 \overset{7}{\mid} 77/220 \overset{11}{\mid} 7/20.$$

Das erste Verfahren ist aber vorzuziehen, weil man gleich das Endergebniß auf einmal erhält, und oft der Bruch aus großen Primzahlen oder Grundzahlen besteht, die man nicht immer sogleich als solche erkennt.

§. 42. Beispiele zur Uebung. Man soll folgende Brüche aufheben:

I.

1) $^{693}/_{792}$; 2) $^{195}/_{1456}$; 3) $^{221}/_{1190}$; 4) $^{21980}/_{87680}$; 5) $^{3203}/_{4537}$; 6) $^{342}/_{437}$; 7) $^{87}/_{116}$; 8) $^{333}/_{407}$; 9) $^{6727}/_{29667}$; 10) $^{1024}/_{1832}$; 11) $^{10794}/_{20046}$; 12) $^{273549}/_{455915}$.

II.

13) $^{945}/_{1512}$; 14) $^{252}/_{2315}$; 15) $^{20736}/_{31104}$; 16) $^{805}/_{2829}$; 17) $^{169}/_{221}$; 18) $^{552}/_{575}$; 19) $^{248}/_{279}$; 20) $^{41}/_{492}$; 21) $^{31752}/_{52920}$; 22) $^{134352}/_{424980}$; 23) $^{1572}/_{7336}$; 24) $^{1799}/_{3341}$.

III.

25) $^{51}/_{85}$; 26) $^{247}/_{312}$; 27) $^{736}/_{1081}$; 28) $^{413}/_{708}$;

29) $^{2059}/_{4118}$; 30) $^{609}/_{812}$; 31) $^{1351}/_{2316}$; 32) $^{1084}/_{1355}$; 33) $^{1415}/_{2264}$; 34) $^{9628}/_{16849}$; 35) $^{24472}/_{27531}$; 36) $^{136591}/_{210140}$.

§. 43. Brüche, welche verschiedene Nenner haben, in gleichgeltende von einerlei Nenner verwandeln heißt: sie unter einerlei Benennung bringen.

§. 44. Aufg. Brüche von verschiedenen Nennern unter einerlei Benennung zu bringen.

Aufl. Man multiplicire den Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen Brüche: so wird man dadurch andere den gegebenen gleiche Brüche erhalten (§. 33), welche das Produkt aus allen Nennern zu ihrem gemeinschaftlichen Nenner haben werden. Z. B.

$$^{2}/_{5} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 7} = {}^{56}/_{140}$$

$$^{3}/_{4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} = {}^{105}/_{140}$$

$$^{5}/_{7} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 5 \cdot 4} = {}^{100}/_{140}$$

Bei diesem Verfahren entsteht bei großen und vielen Nennern ein sehr großer gemeinschaftlicher Nenner; es läßt sich aber oft ein kleinerer finden, welcher der kleinste gemeinschaftliche Nenner heißt. Es ist nämlich schon genug, wenn jeder einzelne Nenner in dem gemeinschaftlichen auch nur einmal als Faktor vorkommt; und jeder kleinere Nenner, der in einem größern steckt, braucht deßhalb ebenfalls nicht besonders als Faktor in dem gemeinschaftlichen Nenner vorzukommen. Um nun den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner sicher zu finden, zerfälle man einen jeden gegebenen Nenner in seine kleinsten Faktoren, und

füge dann den Faktoren eines jeden Nenners diejenigen aus den Faktoren der andern Nenner hinzu, die ihm selbst noch fehlen. Und damit kein Bruch etwas an seinem Werthe verliere, muß man den Zähler eines jeden Bruches mit eben der Zahl multipliciren, mit welcher man den Nenner multiplicirt. Ein Beispiel wird die Sache anschaulich und deutlich machen. Man soll folgende Brüche unter einerlei Benennung bringen: $^1/_4$, $^5/_6$, $^3/_8$, $^2/_{15}$. Es ist $4 = 2 . 2$ und $6 = 2 . 3$; sodann $8 = 2 . 2 . 2$ und $15 = 3 . 5$. Demnach

$$^1/_4 = \frac{1 . 3 . 2 . 5}{2 . 2 . 3 . 2 . 5} = {}^{30}/_{120}$$

$$^5/_6 = \frac{5 . 2 . 2 . 5}{2 . 3 . 2 . 2 . 5} = {}^{100}/_{120}$$

$$^3/_8 = \frac{3 \;.\; 3 . 5}{2 . 2 . 2 . 3 . 5} = {}^{45}/_{120}$$

$$^2/_{15} = \frac{2 . 2 . 2 . 2}{3 . 5 . 2 . 2 . 2} = {}^{16}/_{120}$$

Nach der allgemeinen Regel wäre der gemeinschaftliche Nenner $= 4 . 6 . 8 . 15 = 2880$.

Ein anderes Verfahren ist folgendes: Man streiche die Nenner, die in einem größern oder höhern ganz enthalten sind, weg; dividire die übrigen, wenigstens zu zwei und zwei, durch einen gemeinschaftlichen Theiler, und schreibe sowohl diesen Theiler, der unverändert bleiben muß, als auch die erhaltenen Quotienten statt der dividirten Zahlen hin. Die Quotienten aber dürfen unter sich und mit den gegebenen Divisoren, wo es angeht, verkleinert werden. Endlich multiplicire man sowohl die übriggelassenen Divisoren, als auch die Quotienten mit einander. Das Produkt gibt den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. In denselben dividire man mit den Nen-

ner eines jeden Bruchs, und mit seinem Zähler multiplicire man den dadurch gewonnenen Quotienten. Dieses Produkt gibt den jedem Bruche zugehörigen neuen Zähler. Das vorige Beispiel wird nach diesem Verfahren also berechnet: Die Nenner sind

4 6 8 15
3) 2 4 5
2) 1

Das Produkt dieser Divisoren und Quotienten ist

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

als der kleinste gemeinschaftliche Nenner. Man kann dann vollends also fortfahren

| | 120 | | folglich |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{4}$ | 30 | 30 | $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$ |
| $\frac{5}{6}$ | 20 | 100 | $\frac{5}{6} = \frac{100}{120}$ |
| $\frac{3}{8}$ | 15 | 45 | $\frac{3}{8} = \frac{45}{120}$ |
| $\frac{2}{15}$ | 8 | 16 | $\frac{2}{15} = \frac{16}{120}$ |

wie vorhin. Der Grund dieses Verfahrens beruht darauf, daß man durch das Ausstreichen und Dividiren die mehrmals vorkommenden gleichen Faktoren wegschafft, und die nur einmal vorhandenen sodann multiplicirt, durch welches Produkt der kleinste gemeinschaftliche Nenner hervortritt. Indem man nun hierauf in denselben durch die gegebenen einzelnen Nenner dividirt, ergibt sich, wie vielmal der gemeinschaftliche Nenner größer ist als jeder der gegebenen. Darum wird auch der gegebene Zähler mit jedem zugehörigen Quotienten multiplicirt. Weil nun auf diese Weise Zähler und Nenner eines jeden Bruches gleichvielmal größer genommen oder geworden ist, so ist der Werth des anfänglichen Bruches nicht geändert (§. 33).

§. 45. Nicht immer können die Nenner in Fak-

toren zerlegt werden, wenn sie nämlich Primzahlen sind. Für diesen Fall gibt es keinen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner. Man verfährt dann, wie gleich am Anfang des vorigen §. 44 ist gelehrt worden. Z. B.

$$^{2}/_{3} = \frac{2.5.2.7}{3.5.2.7} = {}^{140}/_{210}$$

$$^{4}/_{5} = \frac{4.3.2.7}{5.3.2.7} = {}^{168}/_{210}$$

$$^{1}/_{2} = \frac{1.3.5.7}{2.3.5.7} = {}^{105}/_{210}$$

$$^{1}/_{7} = \frac{1.3.5.2}{7.3.5.2} = {}^{30}/_{210}$$

Zur Uebung soll man folgende Brüche unter einerlei Benennung bringen:

I.

1) $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{6}$; 2) $^{3}/_{8}$, $^{5}/_{12}$, $^{3}/_{3}$, $^{2}/_{7}$
3) $^{3}/_{10}$, $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{15}$, $^{11}/_{18}$; 4) $^{7}/_{20}$, $^{2}/_{21}$, $^{3}/_{10}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{11}$
5) $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{2}$, $^{7}/_{8}$, $^{5}/_{6}$, $^{13}/_{20}$, $^{2}/_{5}$, $^{13}/_{28}$
6) $^{2}/_{5}$, $^{7}/_{8}$, $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{6}$, $^{3}/_{10}$
7) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{5}$, $^{2}/_{7}$, $^{8}/_{11}$; 8) $^{5}/_{9}$, $^{2}/_{17}$, $^{1}/_{2}$, $^{4}/_{5}$
9) $^{1}/_{9}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{6}$, $^{1}/_{2}$; 10) $^{1}/_{12}$, $^{9}/_{16}$, $^{7}/_{8}$, $^{5}/_{6}$, $^{11}/_{24}$
11) $^{7}/_{22}$, $^{5}/_{11}$, $^{14}/_{55}$, $^{3}/_{5}$, $^{9}/_{10}$
12) $^{2}/_{3}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{12}$, $^{14}/_{15}$, $^{7}/_{30}$, $^{4}/_{5}$, $^{19}/_{20}$, $^{17}/_{60}$.

II.

13) $^{4}/_{5}$, $^{1}/_{6}$, $^{7}/_{12}$; 14) $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{9}$, $^{3}/_{4}$
15) $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{5}$, $^{7}/_{12}$, $^{5}/_{8}$
16) $^{1}/_{6}$, $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{8}$, $^{4}/_{5}$, $^{19}/_{32}$, $^{23}/_{24}$
17) $^{7}/_{8}$, $^{1}/_{9}$, $^{5}/_{12}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{16}$, $^{1}/_{2}$
18) $^{4}/_{5}$, $^{1}/_{3}$, $^{7}/_{9}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{7}$, $^{5}/_{8}$, $^{3}/_{4}$
19) $^{7}/_{13}$, $^{2}/_{5}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{10}$, $^{7}/_{8}$
20) $^{6}/_{7}$, $^{4}/_{9}$, $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{8}/_{9}$, $^{5}/_{6}$
21) $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{7}$, $^{1}/_{8}$, $^{5}/_{12}$, $^{7}/_{15}$

22) $^2/_3$, $^4/_9$, $^3/_5$, $^7/_8$, $^1/_4$, $^3/_8$, $^7/_{10}$
23) $^1/_8$, $^2/_5$, $^3/_4$, $^7/_{20}$, $^5/_8$, $^1/_3$, $^4/_5$, $^1/_4$
24) $^5/_6$, $^7/_{10}$, $^4/_5$, $^{29}/_{90}$, $^2/_3$, $^7/_{15}$, $^1/_2$, $^{17}/_{45}$, $^1/_{30}$.

III.

25) $^3/_7$; $^4/_9$, $^2/_3$; 26) $^5/_6$, $^2/_5$, $^3/_8$, $^5/_9$
27) $^8/_{13}$, $^1/_2$, $^7/_8$; 28) $^3/_4$, $^5/_9$, $^8/_{15}$, $^1/_6$
29) $^5/_{12}$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^2/_3$; 30) $^5/_7$, $^3/_{28}$, $^4/_5$, $^3/_4$
31) $^7/_{60}$, $^2/_{15}$, $^5/_{12}$, $^3/_8$, $^7/_{24}$
32) $^5/_6$, $^2/_7$, $^5/_{12}$, $^3/_8$, $^1/_2$
33) $^4/_5$, $^3/_7$, $^5/_8$, $^7/_{12}$, $^9/_{20}$
34) $^7/_{36}$, $^5/_8$, $^2/_3$, $^4/_7$, $^5/_{12}$, $^3/_4$
35) $^1/_2$, $^2/_{25}$, $^3/_5$, $^4/_9$, $^1/_3$, $^7/_{10}$
36) $^5/_{14}$, $^4/_5$, $^3/_7$, $^5/_8$, $^4/_{21}$, $^7/_{12}$.

§. 46. Aufg. Zu untersuchen, ob gegebene Brüche einander gleich sind, oder nicht.

Aufl. Man bringe die gegebenen Brüche zuerst unter einerlei Benennung, und dann vergleiche man ihre Zähler. Derjenige, welcher den größern Zähler hat, ist auch der größere; der andere ist der kleinere. Denn wer bei gleicher Eintheilung mehre Theile zählt, ist der größere. Z. B. $^3/_5$ und $^4/_7$. Es ist nun

$$^3/_5 = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = {}^{21}/_{35}$$

$$^4/_7 = \frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 5} = {}^{20}/_{35}$$

also ist $^3/_5$ mehr oder größer als $^4/_7$.

§. 47. Man vergleiche die Werthe folgender Brüche:

1) $^7/_8$ und $^{15}/_{17}$
2) $^5/_{16}$ und $^7/_{23}$
3) $^4/_9$ und $^{15}/_{41}$
4) In welcher Ordnung folgen die Werthe der Brüche $^3/_5$, $^4/_7$ und $^5/_8$?

5) dann der Brüche $^9/_{16}$, $^7/_{12}$, $^6/_{11}$, $^5/_9$ und $^3/_8$?
6) endlich der Brüche $^4/_{11}$, $^8/_{13}$, $^7/_{22}$, $^5/_{16}$ und $^6/_{17}$?

§. 48. Gemischte Zahlen nennt man solche, welche aus ganzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind. Z. B. $12^5/_9$, $8^1/_6$.

§. 49. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen zu addiren.

Aufl. 1. Da nur Gleichartiges addirt oder zusammengezählt werden kann, so müssen die Brüche, wenn sie verschiedene Nenner haben, vor Allem unter einerlei Benennung gebracht werden. Wenn alle Brüche einerlei Nenner haben, so zähle man ihre Zähler zusammen und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner. Denn Brüche mit gleichen Nennern sind als Größen von einerlei Art zu betrachten, deren Menge d. h. deren sämmtliche Zähler man wissen will. Kommen in der Summe unächte oder uneigentliche Brüche zum Vorschein, so ziehe man die Ganzen heraus (nach §. 31). Z. B.

1)
$$\begin{aligned}
^1/_4 &= \frac{1\ \ .3}{2.2.3} = {}^3/_{12} \\
^5/_6 &= \frac{5\ \ .2}{2.3.2} = {}^{10}/_{12} \\
^1/_2 &= \frac{1.2.3}{2.2.3} = {}^6/_{12} \\
^3/_4 &= \frac{3\ \ .3}{2.2.3} = {}^9/_{12} \\
\hline
^{28}/_{12} &= 2^4/_{12} = 2^1/_3
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
&^3/_8 \\
&^5/_8 \\
&^1/_8 \\
&^2/_8 \\
\hline
&^{11}/_8 = 1^3/_8
\end{aligned}$$

2. Bei gemischten Zahlen addire man zuerst die gegebenen Brüche, wie vorhin (Nr. 1); alsdann die gegebenen ganzen Zahlen, und zähle zu diesen die ganzen Einheiten, welche in der Summe der Brüche etwa enthalten sind. Z. B.

1) $4\frac{1}{8} = 4\frac{3}{24}$
$7\frac{2}{3} = 7\frac{16}{24}$
$10\frac{3}{4} = 10\frac{18}{24}$
$8\frac{1}{3} = 8\frac{8}{24}$
$29\frac{45}{24} = 30\frac{21}{24} = 30\frac{7}{8}$

2) $6\frac{1}{3} = 6\frac{616}{1848}$
$4\frac{5}{7} = 4\frac{1320}{1848}$
$11\frac{3}{8} = 11\frac{693}{1848}$
$9\frac{7}{11} = 9\frac{1176}{1848}$
$30\frac{3805}{1848} = 32\frac{109}{1848}$.

## §. 50. Beispiele zur Uebung. Man addire:

### I.

1) $\frac{5}{6}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{4}{5}$

3) $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{4}{5}$

4) $9\frac{3}{4}$, $12\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{3}$, $15\frac{1}{2}$

5) $12\frac{1}{2}$, $60\frac{5}{6}$, $8\frac{3}{4}$, $16\frac{2}{3}$, $21\frac{1}{4}$

6) $15\frac{1}{4}$, $18\frac{3}{5}$ $7\frac{2}{3}$, $8\frac{3}{4}$, $12\frac{5}{8}$, $24\frac{15}{16}$

7) $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{5}{42}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$

8) $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{6}$ und $\frac{15}{16}$

9) $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{9}{16}$; $\frac{17}{20}$, $\frac{13}{23}$

10) $4\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $5\frac{7}{12}$, $13\frac{8}{9}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{5}{36}$

11) $12\frac{4}{5}$, $9\frac{7}{10}$, $11\frac{1}{2}$, $2\frac{11}{20}$, $15\frac{1}{4}$ und $6\frac{5}{8}$

12) $8\frac{3}{4}$, $94\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$, $9\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{8}$, $\frac{12}{25}$, $102\frac{19}{60}$, $52\frac{11}{18}$, $500\frac{17}{32}$, $\frac{25}{36}$, $87\frac{19}{64}$ und $205\frac{13}{24}$.

### II.

13) $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$

14) $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{8}$

15) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$

16) $104\frac{1}{6}$, $86\frac{4}{5}$, $13\frac{1}{2}$, $236\frac{5}{12}$, $51\frac{7}{8}$

17) $25\frac{2}{3}$, $88\frac{4}{7}$, $431\frac{5}{6}$, $29\frac{3}{4}$, $92\frac{1}{4}$, $43\frac{7}{9}$

18) $4\frac{7}{8}$, $6\frac{1}{2}$, $15\frac{3}{20}$, $8\frac{7}{10}$, $3\frac{7}{15}$, $12\frac{1}{4}$, $18\frac{5}{6}$

19) $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{5}{30}$, $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{8}$

20) $36\frac{1}{4}$, $17\frac{2}{9}$, $33\frac{4}{5}$, $87\frac{5}{6}$, $42\frac{1}{2}$, $18\frac{4}{11}$, $48\frac{7}{22}$

21) $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{21}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$

22) $123\frac{4}{5}$, $836\frac{7}{10}$, $15\frac{3}{8}$, $76\frac{4}{25}$, $147\frac{1}{2}$, $724\frac{13}{30}$

23) $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{7}$

24) $68\frac{5}{7}$, $18\frac{3}{4}$, $21\frac{7}{12}$, $300\frac{4}{9}$, $216\frac{1}{5}$, $47\frac{1}{3}$, $81\frac{3}{5}$, $19\frac{3}{4}$.

**III.**

25) $^{3}/_{4}$, $^{2}/_{3}$, $^{7}/_{12}$, $^{8}/_{9}$; 26) $^{4}/_{5}$, $^{1}/_{8}$, $^{13}/_{15}$, $^{5}/_{6}$

27) $12^{1}/_{7}$, $2^{2}/_{3}$, $^{11}/_{21}$, $14^{1}/_{2}$, $8^{11}/_{12}$

28) $^{5}/_{9}$, $^{2}/_{5}$, $^{25}/_{27}$, $^{3}/_{10}$, $^{5}/_{18}$, $^{8}/_{9}$

29) $20^{14}/_{17}$, $19^{8}/_{15}$, $5^{2}/_{3}$, $10^{19}/_{51}$, $^{152}/_{153}$

30) $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{12}$, $^{5}/_{6}$, $^{4}/_{9}$, $^{1}/_{4}$, $^{1}/_{3}$, $^{13}/_{24}$, $^{1}/_{6}$

31) $17^{7}/_{20}$, $436^{1}/_{2}$, $65^{3}/_{4}$, $172^{2}/_{15}$, $8^{3}/_{8}$, $11^{9}/_{10}$, $^{1}/_{12}$, $6^{2}/_{3}$

32) $754^{5}/_{7}$, $212^{5}/_{9}$, $16^{31}/_{36}$, $25^{1}/_{6}$, $318^{2}/_{3}$, $97^{8}/_{21}$, $1^{3}/_{4}$, $50^{23}/_{27}$, $^{17}/_{18}$

33) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, $^{5}/_{6}$, $^{7}/_{8}$, $^{10}/_{11}$, $^{4}/_{5}$, $^{8}/_{9}$, $^{11}/_{12}$, $^{17}/_{22}$

34) $43^{9}/_{16}$, $5^{37}/_{48}$, $21^{7}/_{8}$, $567^{5}/_{6}$, $1428^{1}/_{4}$, $70^{5}/_{12}$, $89^{17}/_{36}$, $^{5}/_{24}$, $33^{13}/_{48}$, $22^{2}/_{3}$, $113^{1}/_{6}$

35) $19^{5}/_{22}$, $36^{16}/_{27}$, $2594^{13}/_{54}$, $374^{8}/_{9}$, $415^{5}/_{6}$, $777^{11}/_{18}$, $55^{3}/_{11}$, $601^{3}/_{5}$

36) $8417^{3}/_{8}$, $564^{4}/_{9}$, $3^{11}/_{12}$, $78^{5}/_{8}$, $27^{5}/_{8}$, $400^{2}/_{3}$, $18^{1}/_{15}$, $48^{3}/_{4}$, $5006^{7}/_{18}$, $242^{2}/_{5}$, $3610^{5}/_{6}$, $97^{7}/_{12}$.

§. 51. Um eine gemischte Zahl in einen ihr gleichen Bruch zu verwandeln, multiplicire man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches, addire zum Produkte den Zähler dieses Bruches und schreibe den vorigen Nenner des Bruches als Nenner darunter, z. B. $6^{2}/_{7} = \frac{6 \,.\, 7 + 2}{7} = {}^{44}/_{7}$; eben so $1^{13}/_{24} = \frac{1 \,.\, 24 + 13}{24} = {}^{37}/_{24}$.

§. 52. **Aufg.** Brüche und gemischte Zahlen von einander abzuziehen.

**Aufl. 1.** Man sorge zuerst dafür, daß die Brüche einerlei Nenner haben. Alsdann ziehe man die Zähler der Brüche von einander ab, und schreibe unter den Rest den gemeinschaftlichen Nenner. Denn dadurch werden Größen, deren Grundeinheit einerlei Eintheilung hat, von einander abgezogen. Z. B. von $^{11}/_{12}$ sollen $^{5}/_{12}$ abgezogen werden:

| | | |
|---|---|---|
| ${}^{11}/_{12}$ | Eben so | ${}^{7}/_{9} = {}^{91}/_{117}$ |
| ${}^{5}/_{12}$ | | ${}^{8}/_{13} = {}^{72}/_{117}$ |
| Rest ${}^{6}/_{12} = {}^{1}/_{2}$ | | Rest ${}^{19}/_{117}$ |

2. Bei gemischten Zahlen ziehe man zuerst die Brüche von einander ab, wie vorhin (Nr. 1); alsdann die ganzen Zahlen. Sollte sich der eine Bruch von dem andern nicht abziehen lassen: so borge man von den ganzen Zahlen des Minuenden eine Einheit. Diese gibt einen Bruch von gleichem Zähler und Nenner, weil $1 = {}^{2}/_{2} = {}^{3}/_{3} = {}^{4}/_{4}$ u. s. w. ist. Man muß aber den Nenner dem gemeinschaftlichen Nenner der abzuziehenden Brüche gleich machen. Z. B.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $18^{4}/_{5} = 18^{32}/_{40}$ | 2) | $36^{1}/_{7} = 36^{3}/_{21}$ |
| | $7^{3}/_{8} = 7^{15}/_{40}$ | | $19^{2}/_{3} = 19^{14}/_{21}$ |
| | Rest $11^{17}/_{40}$ | | Rest $16^{10}/_{21}$ |

§. 53. Man berechne noch folgende Beispiele:

I.

1) ${}^{12}/_{17} - {}^{9}/_{17}$; 2) ${}^{3}/_{4} - {}^{5}/_{8}$; 3) ${}^{19}/_{25} - {}^{5}/_{9}$;
4) $42^{5}/_{8} - 6^{3}/_{8}$; 5) $109^{5}/_{12} - 34^{4}/_{7}$;
6) $36^{3}/_{5} - 5^{2}/_{3}$; 7) ${}^{11}/_{28} - {}^{17}/_{72}$; 8) ${}^{31}/_{42} - {}^{9}/_{14}$;
9) ${}^{113}/_{560} - {}^{135}/_{784}$; 10) $4^{3}/_{5} - {}^{13}/_{16}$;
11) $12 - 9^{5}/_{18}$; 12) $18^{3}/_{7} - 14$.

II.

13) ${}^{11}/_{12} - {}^{5}/_{12}$; 14) ${}^{7}/_{8} - {}^{9}/_{16}$; 15) ${}^{7}/_{15} - {}^{3}/_{20}$;
16) $36^{7}/_{9} - 12^{2}/_{9}$; 17) $27^{3}/_{4} - 15^{7}/_{12}$;
18) $64^{2}/_{5} - 18^{6}/_{7}$; 19) ${}^{14}/_{23} - {}^{1}/_{4}$; 20) ${}^{5}/_{8} - {}^{17}/_{32}$;
21) $34^{11}/_{20} - 19^{5}/_{27}$; 22) $76^{2}/_{5} - {}^{29}/_{35}$;
23) $56 - 31^{5}/_{12}$; 24) $81^{3}/_{7} - 35$.

III.

25) ${}^{29}/_{36} - {}^{11}/_{36}$; 26) ${}^{7}/_{12} - {}^{13}/_{48}$; 27) ${}^{9}/_{16} - {}^{31}/_{64}$;
28) ${}^{8}/_{13} - {}^{6}/_{17}$; 29) $57^{3}/_{4} - 23^{5}/_{8}$;
30) $106^{2}/_{7} - 84^{5}/_{6}$; 31) $8^{13}/_{19} - 2^{11}/_{12}$;
32) ${}^{131}/_{144} - {}^{5}/_{12}$; 33) ${}^{223}/_{360} - {}^{35}/_{72}$;

34) $77 - 42\frac{124}{285}$; 35) $92\frac{8}{25} - 67\frac{15}{57}$;
36) $417\frac{8}{22} - 299$.

§. 54. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen mit einander zu multipliciren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch mit einem Bruche zu multipliciren ist, so multiplicire man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler, das andere den neuen Nenner. Z. B.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{6}{20} \text{ oder } \frac{3}{10}.$$

Nämlich $\frac{2}{5}$ soll hier nicht 3mal ganz, sondern blos mit dem vierten Theil davon genommen werden d. h. $\frac{2}{5}$ soll 3mal genommen, aber dann mit 4 dividirt werden. Das Erstere geschieht (vermöge §. 32), indem man den Zähler (hier 2) durch 3 multiplicirt; das Andere (ebenfalls vermöge §. 32), wenn man den Nenner (hier 5) durch 4 multiplicirt. Hieraus erhellet der Grund des Verfahrens, der an jedem andern Beispiel auf gleiche Weise nachgewiesen werden kann.

Eben so kann man auch drei und mehre Brüche mit einander multipliciren, z. B.

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 7 \cdot 4} = \frac{15}{84}.$$

2. Ist der eine Faktor eine ganze Zahl, der andere ein Bruch: so multiplicire man die ganze Zahl mit dem Zähler des Bruches, und lasse den Nenner ungeändert. Der Grund davon erhellet aus §. 32; oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin (Nr. 1). Z. B.

$$7 \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$$

oder $\frac{7}{1} \cdot \frac{5}{13} = \frac{35}{13} = 2\frac{9}{13}$

Eben so $\frac{3}{8} \cdot 12 = \frac{36}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$.

3. Sind unter den Faktoren gemischte Zahlen, so

verwandle man sie in Brüche (§. 51) und verfahre dann nach den vorhergehenden Regeln. Z. B.

$$6^2/_5 \cdot 4^1/_3 = {}^{32}/_5 \cdot {}^{13}/_3 = {}^{416}/_{15} = 27^{11}/_{15}$$

$$1^7/_8 \cdot 10 = {}^{15}/_8 \cdot 10 = {}^{150}/_8 = 18^3/_4$$

$${}^5/_9 \cdot 2^1/_4 = {}^5/_9 \cdot {}^9/_4 = {}^5/_4 = 1^1/_4.$$

§. 55. Einige Beispiele zur Uebung:

I.

1) ${}^9/_{12} \cdot {}^{17}/_{25}$; 2) ${}^5/_8 \cdot {}^3/_6 \cdot {}^1/_4$; 3) $132 \cdot {}^7/_{12}$;
4) ${}^{19}/_{41} \cdot 86$; 5) $153^1/_8 \cdot {}^{16}/_{25}$; 6) $28^4/_5 \cdot 51^7/_8$;
7) ${}^7/_{85} \cdot {}^{59}/_{67}$, 8) ${}^{16}/_{19} \cdot {}^8/_{12}$; 9) ${}^3/_8 \cdot {}^5/_7 \cdot {}^{19}/_{29}$;
10) ${}^3/_{16} \cdot 4^{11}/_{17}$; 11) $4538^6/_{11} \cdot {}^{19}/_{23}$;
12) $32^1/_4 \cdot 32^1/_4$.

II.

13) ${}^7/_{15} \cdot {}^3/_{14}$; 14) ${}^2/_3 \cdot {}^5/_7 \cdot {}^3/_5$; 15) $144 \cdot {}^9/_{24}$;
16) ${}^{23}/_{48} \cdot 24$; 17) $36^4/_5 \cdot {}^{15}/_{16}$; 18) $42^3/_5 \cdot 19^1/_3$;
19) ${}^7/_{24} \cdot {}^6/_7$; 20) ${}^{37}/_{40} \cdot {}^8/_{21}$; 21) ${}^3/_4 \cdot {}^2/_4 \cdot {}^4/_7$;
22) ${}^5/_9 \cdot 34^1/_3$; 23) $9^{11}/_{12} \cdot 5^3/_5$; 24) $59^3/_4 \cdot 59^3/_4$.

III.

25) ${}^6/_8 \cdot {}^5/_{12}$; 26) ${}^{15}/_{16} \cdot {}^4/_9$; 27) ${}^5/_8 \cdot {}^3/_7 \cdot {}^8/_{15}$;
28) $72 \cdot {}^7/_{12}$; 29) ${}^{18}/_{25} \cdot 95$; 30) $12^3/_5 \cdot {}^7/_9$;
31) $24^1/_2 \cdot 7^4/_5$; 32) ${}^6/_7 \cdot {}^7/_{12}$; 33) ${}^{14}/_{19} \cdot {}^5/_7$;
34) ${}^2/_5 \cdot {}^7/_8 \cdot {}^5/_{12}$; 35) ${}^6/_{23} \cdot 15^1/_3$; 36) $14^2/_3 \cdot 8^4/_5$.

§. 56. Aufg. Brüche und gemischte Zahlen durch einander zu dividiren.

Aufl. 1. Wenn ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll: so multiplicire man den Zähler des Dividenden mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividenden mit dem Zähler des Divisors. Das erste Produkt gibt den neuen Zähler und das andere den neuen Nenner; oder kürzer: Man kehre den Divisor um, und multiplicire mit dem umgekehrten Bruch nach obigen Regeln der Multiplikation. Z. B.

$${}^6/_7 : {}^3/_8 = {}^6/_7 \cdot {}^8/_3 = {}^{48}/_{21} = 2^2/_7.$$

Denn mit $^3/_8$ dividiren heißt mit dem achten Theil von 3 dividiren. Wenn man daher durch 3 dividirt (welches geschieht, indem man den Nenner von $^6/_7$ mit 3 multiplicirt, §. 32), so ist der Quotient (hier $\frac{6}{7 \, . \, 3}$) 8mal zu klein und muß daher erst noch mit 8 multiplicirt werden; daher ist der vollständige Quotient hier $\frac{6 \, . \, 8}{7 \, . \, 3}$ d. i. $^{48}/_{21} = 2^2/_7$. Hieraus erhellet die Richtigkeit der voranstehenden Regel.

2. Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so lasse man den Zähler unverändert, und multiplicire den Nenner mit der ganzen Zahl. Den Grund des Verfahrens gibt §. 32 an; oder man schreibe die ganze Zahl als einen Bruch, indem man ihr 1 zum Nenner gibt, und verfahre wie vorhin Nr. 1. Z. B.

$$^6/_{11} : 5 = \frac{6}{11 \, . \, 5} = {^6/_{55}}.$$

$$^8/_9 : 4 = {^8/_9} : {^4/_1} = {^8/_9} \, . \, {^1/_4} = {^8/_{36}} = {^2/_9}.$$

3. Wenn eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren ist, so tritt der erste Fall wieder ein; welches auch erhellet, wenn man die ganze Zahl als einen Bruch schreibt, dessen Nenner 1 ist. Z. B.

$$12 : {^2/_3} = 12 \, . \, {^3/_2} = {^{36}/_2} = 18.$$

oder $12 : {^2/_3} = {^{12}/_1} : {^2/_3} = {^{12}/_1} \, . \, {^3/_2} = {^{36}/_2} = 18.$

4. Kommen gemischte Zahlen vor, so verwandele man sie zuerst in unächte Brüche und verfahre dann nach den vorigen Regeln der Division. Z. B.

$$2^1/_4 : 7 = {^9/_4} : 7 = {^9/_{28}}$$

$$16 : 8^1/_2 = 16 : {^{17}/_2} = {^{32}/_{17}} = 1^{15}/_{17}$$

$$3^1/_8 : 4^2/_5 = {^{25}/_8} : {^{22}/_5} = {^{125}/_{176}}.$$

§. 57. Beispiele zur Uebung:

I.

1) $^8/_9 : {^5/_8}$; 2) $^{18}/_{57} : {^{67}/_{83}}$; 3) $^5/_6 : 5$; 4) $^8/_9 : 12$;

5) $45 : \frac{4}{5}$;  6) $365 : \frac{3}{4}$;  7) $25\frac{3}{4} : 6$;
8) $60 : 4\frac{1}{2}$;  9) $12\frac{2}{3} : 7\frac{1}{4}$;  10) $486\frac{3}{4} : 40\frac{3}{8}$;
11) $\frac{5}{8} : \frac{6}{7}$;  12) $6 : \frac{17}{31}$.

II.

13) $\frac{5}{7} : \frac{3}{4}$;  14) $\frac{21}{25} : \frac{7}{15}$;  15) $\frac{3}{4} : 6$;
16) $\frac{7}{12} : 28$;  17) $54 : \frac{18}{23}$;  18) $400 : \frac{8}{9}$;
19) $8\frac{3}{11} : \frac{4}{7}$;  20) $36 : 4\frac{1}{2}$;  21) $\frac{13}{17} : \frac{4}{11}$;
22) $8 : \frac{5}{19}$;  23) $2\frac{3}{8} : 5\frac{7}{12}$;  24) $12\frac{5}{13} : 2\frac{17}{29}$.

III.

25) $\frac{7}{13} : \frac{5}{8}$;  26) $\frac{19}{22} : \frac{3}{11}$;  27) $\frac{7}{8} : 3$;
28) $\frac{17}{23} : 34$;  29) $72 : \frac{24}{31}$;  30) $8\frac{3}{5} : 1\frac{7}{8}$;
31) $\frac{23}{25} : 8$;  32) $\frac{13}{15} : \frac{7}{10}$;  33) $514\frac{2}{3} : 18\frac{4}{7}$;
34) $\frac{15}{29} : \frac{30}{87}$;  35) $72\frac{1}{2} : 3\frac{5}{8}$;  36) $237 : 11\frac{2}{7}$.

§. 58. Brüche, deren Zähler oder Nenner, oder beide zugleich Brüche sind, heißen **Bruchsbrüche** oder **Doppelbrüche**. Z. B. $\frac{1\frac{3}{4}}{6}$ oder $\frac{\frac{7}{4}}{6}$; $\frac{9}{8\frac{2}{3}}$ oder $\frac{9}{\frac{26}{3}}$; $\frac{2\frac{1}{3}}{5\frac{1}{8}}$ oder $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}}$. Solche Brüche können auch in ganz gewöhnlichen Rechnungen vorkommen; so hört man ja oft z. B. von einem halb Viertel $\frac{\frac{1}{2}}{4}$, halb Achtel $\frac{\frac{1}{2}}{8}$ u. s. w. Man sieht aber von selbst, daß sie keine besondere Behandlung erfordern. Man behandelt nämlich solche Brüche wie Quotienten oder Divisionen (§. 29), wo der Zähler den Dividenden und der Nenner den Divisor abgibt. So ist

$\frac{\frac{7}{4}}{6} = \frac{7}{4} : 6 = \frac{7}{24}$; eben so $\frac{9}{\frac{26}{3}} = 9 : \frac{26}{3} = \frac{27}{26}$ $= 1\frac{1}{26}$; ferner $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{41}{8}} = \frac{7}{3} : \frac{41}{8} = \frac{56}{123}$. Andere Beispiele sind: $\frac{1}{8\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{25}{3}} = 1 : \frac{25}{3} = \frac{3}{25}$; ferner

$\frac{1}{2^8/_{25}} = \frac{1}{^{58}/_{25}} = 1 : {}^{58}/_{25} = {}^{25}/_{58}$; endlich $\frac{^3/_4}{^1/_2} = {}^3/_4 : {}^1/_2$ $= {}^6/_4 = 1^1/_2$ und $\frac{^1/_2}{^3/_4} = {}^1/_2 : {}^3/_4 = {}^2/_3$.

## Drittes Kapitel.

## Von den Decimalbrüchen.

§. 59. Brüche, deren Nenner die Zahl 10 oder ein Produkt aus der Zahl 10 mit sich selbst ist, heißen Decimalbrüche. Z. B. $^6/_{10}$, $^5/_{100}$, $^{14}/_{1000}$, $^{3278}/_{10000}$, u. s. w.

§. 60. Die Decimalbrüche gewähren manche Vortheile. Denn weil der Nenner leicht kenntlich ist, so kann man ihn ganz weglassen und durch ein Komma andeuten, indem man im Zähler von der Rechten gegen die Linke durch das Komma so viele Ziffern abschneidet, so viele Nullen der Nenner hat. Enthält der Zähler weniger Ziffern als der Nenner Nullen hat: so werden ihm noch so viele Nullen vorgesetzt, als er braucht, um eben so viele Ziffern zu haben, als im Nenner Nullen sind. Sind keine ganzen Zahlen vorhanden, so wird vor das Komma eine Null gesetzt, wenn aber dergleichen sich vorfinden, so werden sie an die Stelle der Null vor dem Komma geschrieben. Z. B. $^6/_{10} = 0,6$; $^5/_{100} = 0,05$; $^{14}/_{1000} = 0,014$; $^{3278}/_{10000} = 0,3278$; $15^7/_{1000} = 15,007$; $8^{17}/_{100}$ $= 8,17$.

Aus dieser Art, die Decimalbrüche zu schreiben, wird auch das schon gelehrte Gesetz unsers Zahlen=

systems wieder sichtbar, nach welchem die Ziffern von der Linken zur Rechten immer einen zehnfach geringern Werth erhalten. In der ersten Stelle nach dem Komma d. h. nach den Einern stehen die Zehntel, in der zweiten die Hunderttel, in der dritten die Tausendtel u. s. w. Hält man dieses Gesetz fest im Auge, so wird man ohne Schwierigkeit vorgelegte Decimalbrüche aussprechen, und vorgesagte niederschreiben können. Denn auch hier wird, wie bei ganzen Zahlen, diejenige Ordnung, welche fehlt, durch eine Null ersetzt. Z. B. $^{706}/_{1000} = 0{,}706$ sind 7 Zehntel, kein Hunderttel und 6 Tausendtel oder kürzer: 706 Tausendtel. Man denke sich nur immer den Nenner mit der Zahl 1 und so viel Nullen geschrieben, als nach dem Komma Ziffern vorkommen.

Ein anderer Vortheil, der aus der Schreibart entspringt, ist der, daß die Decimalbrüche sich in den verschiedenen Rechnungen nach denselben Regeln behandeln lassen, wie die ganzen Zahlen.

§. 61. Man kann einem Decimalbruche so viele Nullen zur Rechten oder am Ende anhängen, als man nur will, ohne dadurch seinen Werth zu ändern; denn dieser hängt von den Stellen seiner bedeutenden Ziffern ab, und diese werden durch die Stelle des Komma bestimmt. Es ist also $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300 = 0{,}3000$ u. s. w.

Umgekehrt kann man die am Ende befindlichen Nullen eines Decimalbruches, seines Werthes unbeschadet, wegstreichen, und es ist $2{,}450000 = 2{,}45000 = 2{,}4500 = 2{,}450 = 2{,}45$.

§. 62. Aufg. Decimalbrüche zu addiren.

Aufl. Man setze die Decimalen von gleicher Ordnung unter einander, nämlich Zehntel unter Zehn-

tel, Hunderttel unter Hunderttel, Tausendtel unter Tausendtel u. s. w. Alsdann zähle man die unter einander stehenden Zahlen wie ganze Zahlen zusammen, rechne jedesmal den Zehner, der in der Summe einer Reihe heraus kömmt, zur folgenden Reihe und setze in der Summe das Komma, wodurch die Decimalen abgeschnitten werden, unter die Kommate der zu summirenden Zahlen. Denn auf diese Weise erhält man alle Zehntel, Hunderttel u. s. w., die in den zu summirenden Zahlen enthalten sind. Z. B.

| | |
|---|---|
| 14,385 | 0,875 |
| 0,4003 | 0,062 |
| 0,5 | 0,33 |
| 326,0078 | 0,4754 |
| 8,033 | 0,108 |
| 349,3261 | 1,8504 |

§. 63. Andere Beispiele der Addition zur Uebung sind folgende:

I.

1) 6,3409 + 4,5001 + 0,007 + 18,3

2) 23,981 + 0,097 + 5,271 + 106,04

3) 86,291 + 37,456 + 0,704 + 752,004

4) 28,597 + 512,78 + 6,0235 + 54,896 + 485,0026

5) 3208,14 + 21,0036 + 7,254 + 113,09 + 0,708 + 24,0007

6) 78,4132 + 6,14805 + 0,004 + 127,348818 + 0,617 + 94,000264

7) 0,375 + 0,4172 + 0,60792 + 0,2514 + 0,75 + 0,103 + 0,84003 + 0,5104

8) 26,14 + 48,305 + 625,71 + 0,875 + 97,423 + 0,1666 + 4,0025

9) 0,437715 + 8,72455 + 16,048 + 0,00385 + 7,12056 + 28,803046 + 0,785 + 36,105333 + 0,87534

```
3,1415926 | 1,00000000 (0,31830992
             94247778
             --------
              5752222
              3141592
             --------
              2610630
              2513272
             --------
                97358
                94245
             --------
                 3113
                 2826
             --------
                  287
                  279
             --------
                    8
```

§. 78. Wie vortheilhaft und bequem öfters die Rechnung mit Decimalbrüchen, besonders im Vergleich mit den gemeinen Brüchen, sei, kann man leicht wahrnehmen, wenn man folgende Brüche: $^6/_7$, $^4/_9$, $^7/_{13}$, $^8/_{17}$, $^{13}/_{20}$ und $^{22}/_{29}$ einmal nach (§. 49.) addirt, und das anderemal in Decimalbrüche (nach §. 71.) verwandelt und dann gleichfalls (nach §. 62.) addirt. Die erste Verrichtung wird höchst mühsam, die andere sehr leicht von statten gehen.

---

## Viertes Kapitel.

### Die vier Species in benannten Zahlen.

---

§. 79. Eine Zahl, bei welcher man einzig und allein die Menge ihrer Einheiten betrachtet, heißt eine unbenannte Zahl, z. B. 12. Wenn man sie aber auf einen bestimmten Gegenstand beziehet oder anwen-

und wenn sie eine ungleiche Anzahl von Decimalstellen haben, so hänge man (vermöge §. 61) demjenigen, der weniger hat, so viele Nullen an, als ihm abgehen. Alsdann verrichte man die Subtraktion wie bei ganzen Zahlen, und setze das Komma in dem Reste unter die Kommate des Minuenden und Subtrahenden. Die Richtigkeit des Verfahrens wird einem Jeden von selbst einleuchten. Beispiele:

| | |
|---|---|
| 0,87352 | 36,04500 |
| 0,32881 | 8,12634 |
| 0,54471 | 27,91866 |
| | |
| 3,476802 | 12,0875 |
| 0,8039 | 11,637642 |
| 2,672902 | 0,449858 |

§. 65. Zur Uebung im Abziehen der Decimalbrüche mögen noch folgende Beispiele dienen:

I.

1) 37,456 — 0,394; 2) 14,034 — 9,74082;
3) 0,876 — 0,0093864; 4) 28,1270453 — 15,00913;
5) 458 — 396,4578; 6) 13,04728 — 8,35629;
7) 415,0216 — 86,3728; 8) 0,52706 — 0,0394;
9) 62,471 — 13,0069; 10) 18,047 — 17,3185;
11) 0,0956 — 0,08738; 12) 87,4097 — 14,0973.

II.

13) 58,378 — 12,496; 14) 0,682 — 0,2858;
15) 8,73 — 4,96; 16) 0,7015 — 0,3658;
17) 42,03006 — 6,5738; 18) 6442,35 — 857,68;
19) 0,92 — 0,567; 20) 17 — 3,826.

§. 66. Aufg. Decimalbrüche mit einander zu multipliciren.

Aufl. Man schreibe die Faktoren, wie beim Multipliciren ganzer Zahlen, unter einander, ohne

auf die Kommata Rücksicht zu nehmen, und verrichte nun die Multiplikation wie mit ganzen Zahlen. In dem Hauptprodukte schneide man so viele Decimalstellen ab, so viele beide Faktoren zusammen genommen haben.

Enthält das Produkt nicht so viele Ziffern, als nöthig sind, um die gehörige Anzahl von Decimalstellen abschneiden zu können: so setze man demselben so viele Nullen vor, daß das Verlangte geschehen kann. Z. B.

| | |
|---:|---:|
| 38,406 | 76,103 |
| 0,23 | 442 |
| 115218 | 152206 |
| 76812 | 304412 |
| 8,83338 | 304412 |
| | 33637,526 |

| | |
|---:|---:|
| 0,000718 | 8,00005 |
| 23 | 0,029 |
| 2154 | 7200045 |
| 1436 | 1600010 |
| 0,016514 | 0,23200145 |

Dieses Verfahren hat seinen Grund darin, daß jeder Decimalbruch so viel Ziffern enthalten muß, als der Nenner Nullen hat (§. 60). Durch die Multiplikation zweier Decimalbrüche bekommt aber der Nenner des Produkts eigentlich so viele Nullen, als beide Faktoren zusammen genommen haben (§. 20). Darum müssen auch im Produkte so viele Decimalen abgeschnitten werden, als beide Faktoren zusammen genommen enthalten. Anschaulich wird die ganze Sache, wenn man die Decimalbrüche wie gemeine Brüche schreibt und behandelt. Z. B. 0,126 × 8,4

$= {}^{126}/_{1000} \times 8^4/_{10} = {}^{126}/_{1000} \times {}^{84}/_{10} = {}^{10584}/_{10000}$
$= 1,0584.$

§. 67. Zur Einübung des Multiplicirens mit Decimalbrüchen können folgende Beispiele dienen:

| I. | II. |
|---|---|
| 1) 1,478 × 0,2 | 13) 764,3 × 54,25 |
| 2) 5,4103 × 0,9 | 14) 5,769 × 1,43 |
| 3) 2,35704 × 0,03 | 15) 0,005 × 0,09 |
| 4) 57,694 × 0,0001 | 16) 0,4569 × 9,355 |
| 5) 7,21 × 0,35 | 17) 0,02718 × 0,31604 |
| 6) 0,15 × 0,006 | 18) 2,51 × 1,405326 |
| 7) 2,325 × 4,23 | 19) 3,05 × 0,0012 |
| 8) 0,716 × 2,3 × 0,048 | 20) 785439 × 0,128 |
| 9) 3,1415 × 25,4 | 21) 74938,5261 × 4,008 |
| 10) 328,06743 × 0,526 | 22) 43,8 × 17,06 |
| 11) 8,90757 × 86,95 | 23) 193,05 × 86,312 |
| 12) 14,52 × 36 | 24) 4,5 × 36 × 0,004 × 7,48 |

§. 68. Aufg. Decimalbrüche durcheinander zu dividiren.

Aufl. Ohne Rücksicht auf die Kommata zu nehmen, dividire man die Decimalbrüche wie ganze Zahlen, und schneide im Quotienten so viele Decimalstellen ab, um wie viel die Anzahl der Decimalen des Dividenden größer ist, als die Anzahl der Decimalen des Divisors.

Hat der Divisor mehr Decimalen als der Dividend, so hänge man letzterem zur Rechten so viele Nullen an, daß er zum wenigsten so viele Decimalen hat als der Divisor.

Wenn der Divisor und Dividend gleich viele Decimalstellen haben, so wird der Quotient eine ganze Zahl.

Beispiele:

```
2,44 | 83,2528(34,12          48 | 98,784(2,058
       732                          96
      ----                         ----
       1005                         278
        976                         240
       ----                         ---
         292                         384
         244                         384
         ---                         ---
          488                         *
          488
          ---
           *

0,0036 | 59,4(16500           1,12 | 311,36(278
          36                           224
         ----                          ---
          234                           873
          216                           784
          ---                           ---
          18000                          896
          180                            896
          ---                            ---
           *                              *
```

Der Grund des Verfahrens erhellet, wenn man die Decimalbrüche als gemeine Brüche schreibt und dann nach den Regeln der Division mit Brüchen verfährt. Der Nenner des Divisors wird dadurch zu einem Zähler, und es heben sich nun im Nenner des Dividenden so viele Nullen auf, als der Divisor hat. Der Nenner des Quotienten wird also immer so viele Nullen enthalten, so viele der Nenner des Dividenden deren mehr hat als der Divisor. Die Anzahl der Nullen des Nenners aber ist der Anzahl der Ziffern des ganzen Decimalbruchs gleich. Z. B.

1) $0{,}24 : 0{,}8 = {}^{24}/_{100} : {}^{8}/_{10} = {}^{24}/_{100} \times {}^{10}/_{8} = {}^{24}/_{8} \times {}^{10}/_{100} = 3 \times {}^{1}/_{10} = {}^{3}/_{10} = 0{,}3.$

2) $0{,}05532 : 0{,}12 = {}^{5532}/_{100000} : {}^{12}/_{100} = {}^{5532}/_{100000} \times {}^{100}/_{12} = {}^{5532}/_{12} \times {}^{100}/_{100000} = 461 \times {}^{1}/_{1000} = {}^{461}/_{1000} = 0{,}461.$

3) $0{,}084 : 4{,}2 = {}^{84}/_{1000} : 4{}^{2}/_{10} = {}^{84}/_{1000} : {}^{42}/_{10}$

$= {}^{84}/_{1000} \times {}^{10}/_{42} = {}^{84}/_{42} \times {}^{10}/_{1000} = 2 \times {}^{1}/_{100} = {}^{2}/_{100} = 0{,}02.$

4) $311{,}36 : 1{,}12 = 311^{36}/_{100} : 1^{12}/_{100} = {}^{31136}/_{100} : {}^{112}/_{100} = {}^{31136}/_{100} \times {}^{100}/_{112} = {}^{31136}/_{112} \times {}^{100}/_{100} = {}^{31136}/_{112} = 278.$

5) $7{,}44 : 0{,}00124 = 7^{44}/_{100} : {}^{124}/_{100000} = {}^{744}/_{100} : {}^{124}/_{100000} = {}^{744}/_{100} \times {}^{100000}/_{124} = {}^{744}/_{124} \times {}^{100000}/_{100} = {}^{744}/_{124} \times 1000 = {}^{744000}/_{124} = 6000.$

§. 69. Wenn ein Rest bleibt, so ist der Quotient nicht vollständig; will man ihn genauer haben, so hänge man dem Reste Nullen an und setze die Division fort. Jede neu angehängte Null gilt für eine neue Decimalstelle des Dividenden, worauf man also bei der Bestimmung der Decimalen im Quotienten Rücksicht nehmen muß. Dieß läßt sich auch anwenden, wo Ganze durch Ganze dividirt werden, wie das folgende zweite Beispiel lehrt. Z. B.

```
18|213,57|11,865          712|30582|42,95...
   18                         2848
   ---                        ----
    33                         2102
    18                         1424
    ---                        ----
    155                         6780
    144                         6408
    ---                         ----
     117                         3720
     108                         3560
     ---                         ----
       90                         160
       90
       --
        †
```

§. 70. Man übe sich nun in folgenden Beispielen der Division mit Decimalbrüchen:

I.

1) 8,24967 : 1,43; 2) 4,2742995 : 0,355;
3) 4565,33 : 59,29; 4) 129,6 : 0,072;

5) 0,01728 : 36;   6) 37,8 : 45;

7) 4,82852 : 0,00042;   8) 2,421045 : 1,2045;

9) 0,0707112 : 2,35704;   10) 0,6214806 : 0,18;

11) 28,52 : 0,00124;   12) 8533,525 : 204,25.

II.

13) 1055,124 : 12,6;   14) 28,32151 : 8,257;

15) 1,66998 : 6,423;   16) 0,12016 : 6,008;

17) 1571,14 : 0,34;   18) 0,0007935 : 0,023;

19) 46860,5 : 0,745;   20) 4800 : 0,024;

21) 8,172 : 0,072;   22) 0,8837207 : 17,569;

23) 426,240711284 : 32,76859;

24) 73,1478996 : 0,0046302.

§. 71. Aufg. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Aufl. Man hänge an den Zähler Nullen, dividire diesen vermehrten Zähler durch den gegebenen Nenner und schneide von dem Quotienten so viel Decimalstellen ab, als man Nullen angehängt hat. Denn um wieviel der Bruch durch die anfänglich angehängten Nullen vermehrt wird, um eben soviel wird er durch die hernach abgeschnittenen Stellen wieder vermindert. Man kann übrigens soviel Nullen anhängen als man will, entweder soviel, bis die Division aufgeht, oder so viel als verlangt werden. Z. B.

$$1/2 = \frac{1,0}{2} = 0,5;\quad 3/4 = \frac{3,00}{4}\ 0,75;\quad 3/32 = \frac{3,00000}{32} = 0,09375 \text{ und } 5/8 = \frac{5,000}{8} = 0,625.$$

Von dem richtigen Verfahren kann man sich auch also überzeugen: es ist nämlich $5/8 = \frac{5/8 \cdot 10}{10} = \frac{50/8}{10}$

$$= \frac{6 + 2/8}{10} = 6/10 + \frac{2/8}{10} = 6/10 + \frac{2/8 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 6/10$$

$+\frac{{}^{20}/_{8}}{100} = {}^{6}/_{10} + \frac{2 + {}^{4}/_{8}}{100} = {}^{6}/_{10} + {}^{2}/_{100} + \frac{{}^{4}/_{8} \cdot 10}{100 \cdot 10}$
$= {}^{6}/_{10} + {}^{2}/_{100} + {}^{5}/_{1000} = 0{,}625.$

§. 72. Man verwandele folgende Brüche in Decimalbrüche:

I.

1) $^{1}/_{4}$; 2) $^{7}/_{8}$; 3) $^{3}/_{5}$; 4) $^{1}/_{16}$; 5) $^{1}/_{20}$; 6) $^{16}/_{25}$; 7) $^{9}/_{32}$; 8) $^{25}/_{64}$; 9) $^{1}/_{250}$; 10) $^{3}/_{256}$; 11) $^{3}/_{128}$; 12) $^{264}/_{625}$.

II.

13) $^{3}/_{8}$; 14) $^{4}/_{5}$; 15) $^{7}/_{16}$; 16) $^{1}/_{25}$; 17) $^{3}/_{64}$; 18) $^{7}/_{32}$; 19) $^{1}/_{160}$; 20) $^{3}/_{250}$; 21) $^{1}/_{256}$; 22) $^{5}/_{512}$; 23) $^{7}/_{64}$; 24) $^{3}/_{125}$.

III.

25) $^{5}/_{8}$; 26) $^{13}/_{16}$; 27) $^{9}/_{20}$; 28) $^{7}/_{25}$; 29) $^{19}/_{32}$; 30) $^{53}/_{64}$: 31) $^{29}/_{160}$; 32) $^{71}/_{128}$; 33) $^{97}/_{250}$; 34) $^{13}/_{256}$; 35) $^{17}/_{512}$; 36) $^{133}/_{1024}$.

§. 73. Die Division kann mit weniger Decimalstellen, als verlangt werden, aufgehen. In diesem Fall kann man die weiter folgenden Nullen auch weglassen (§. 61). Z. B. Man soll $^{4}/_{5}$ in einen Decimalbruch von 3 Decimalstellen verwandeln; so ist

$$^{4}/_{5} = 0{,}800 = 0{,}8.$$

§. 74. Dagegen kann es sich treffen, daß die Division bei einer verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht aufgeht, sondern einen Rest übrig läßt. Alsdann stellt der Decimalbruch den gemeinen Bruch nicht ganz dar. Ja es gibt Brüche, die sich nie vollkommen in einen Decimalbruch verwandeln lassen, so viele Nullen man auch dem Zähler anhängt. Solche Brüche nennt man *unendliche* oder auch *periodische* Decimalbrüche, und man erkennt sie daran, daß sie bei der Verwandlung oder Division

entweder immer die nämliche Ziffer wiederholen, oder immer zwei, drei, auch mehre gleiche Ziffern, oder endlich nach einer, zwei, auch mehr ungleichen Ziffern immer eine Anzahl gleicher Ziffern zum Vorschein bringen. In einem solchen Falle nimmt man so viele Decimalstellen, daß der noch fehlende Theil als unbedeutend in der Anwendung bei Seite gesetzt werden kann. Man pflegt solche unvollständige Brüche durch einige Punkte zu bezeichnen, die man ihnen am Ende beifügt. Z. B.

1) $^2/_3 = \frac{2{,}0000}{3} = 0{,}6666\ldots$; 2) $^8/_9 = 0{,}88888\ldots$;
3) $^1/_{11} = 0{,}090909\ldots$; 4) $^8/_{27} = 0{,}296296\ldots$;
5) $^1/_6 = 0{,}1666\ldots$; 6) $^7/_{48} = 0{,}1458333\ldots$

§. 75. Man verwandele noch folgende Brüche in Decimalbrüche, und zwar auf 8 Decimalstellen:

I.

1) $^1/_7$; 2) $^3/_{11}$; 3) $^5/_{12}$; 4) $^1/_{15}$; 5) $^{17}/_{19}$; 6) $^7/_{24}$; 7) $^3/_{35}$; 8) $^1/_{223}$; 9) $^{31}/_{345}$; 10) $^3/_{692}$; 11) $^{987}/_{10201}$; 12) $^{413}/_{103212}$.

II.

13) $^4/_7$; 14) $^5/_9$; 15) $^4/_{11}$; 16) $^5/_{24}$; 17) $^3/_{22}$; 18) $^5/_{28}$; 19) $^{35}/_{99}$; 20) $^{23}/_{111}$; 21) $^{58}/_{213}$; 22) $^{37}/_{52}$; 23) $^{59}/_{110}$; 24) $^{151}/_{495}$.

III.

25) $^1/_3$; 26) $^5/_6$; 27) $^4/_9$; 28) $^1/_{12}$; 29) $^2/_{13}$; 30) $^5/_{14}$; 31) $^{23}/_{149}$; 32) $^{57}/_{461}$; 33) $^{186}/_{743}$; 34) $^{15}/_{2381}$; 35) $^{316}/_{4357}$, 36) $^{257}/_{8112}$.

§. 76. Aufg. Einen Decimalbruch in den ihm gleichen gemeinen Bruch zu verwandeln.

Aufl. I. Wenn der Decimalbruch ein vollständiger ist, so schreibe man ihn als einen gemeinen Bruch, und verkleinere ihn alsdann, wenn es möglich ist. Z. B.

$0{,}375 = {}^{375}/_{1000} = {}^{7}/_{8}$ (§. 41)
$0{,}9375 = {}^{9375}/_{10000} = {}^{15}/_{16}$.

II. Wenn aber der Decimalbruch ein periodischer ist, so rücke man das Komma um so viele Stellen von der Linken zur Rechten, als die Periode Ziffern enthält, und ziehe den gegebenen Bruch von diesem neuen ab, nachdem man beiden eine gleiche Anzahl Decimalstellen gegeben hat. Der Rest ist der Zähler des zu suchenden gemeinen Bruches, dem man zum Nenner so viele Neuner (9....) gibt, als in der Periode Ziffern enthalten sind. In dieser Gestalt verkleinere man ihn, wenn es angeht, und gebe ihm überhaupt die gehörige Form. Denn es sei z. B. der vorgelegte periodische Bruch 0,666... und x bezeichne den zu findenden ihm gleichen gemeinen Bruch, so ist offenbar $x = 0{,}666\ldots.$ Nun multiplicire man immer beiderseitig mit 10 oder 100 oder 1000 u. s. w., je nachdem die Periode 1, 2, 3 u. s. w. Ziffern hat, hier also mit 10, und es wird offenbar $10x = 6{,}66\ldots.$ Davon ziehe man den ersten Ausdruck ab, auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} 10x &= 6{,}66\ldots \\ 1x &= 0{,}66\ldots \\ \hline \text{bleibt}\quad 9x &= 6. \end{aligned}$$

Alsdann dividire man immer mit dem Faktor von x, hier also mit 9, auf beiden Seiten: so erhält man $x = {}^{6}/_{9} = {}^{2}/_{3}$.

Auf gleiche Weise findet man den Werth des periodischen Bruches 0,296296.... Wir setzen wiederum $x = 0{,}296296\ldots.$ und multipliciren hier mit 1000 beiderseitig, so wird $1000x = 296{,}296$; ziehen davon ab $\quad x = 0{,}296$

$$\begin{aligned} \hline \text{bleibt}\quad 999x &= 296 \end{aligned}$$ und

dividiren jetzt beiderseitig durch 999; dann erhalten wir $x = {}^{296}/_{999} = {}^{8}/_{27}$.

Stehen vor der Periode noch andere Zahlen, so wird auf die nämliche Weise verfahren. Z. B. es sei 0,1666... der in seinem ihm gleichen gewöhnlichen Bruch zu verwandelnde Decimalbruch. Wir setzen daher $x = 0,1666...$ und multipliciren beiderseitig mit 10; so wird $10x = 1,666$ und davon abgezogen

$$x = 0,166$$

bleibt $9x = 1,5$; demnach $x = \frac{1,5}{9} = {}^{15}/_{90}$ $= {}^{1}/_{6}$; indem wir $\frac{1,5}{9}$ im Zähler und Nenner mit 10 multiplicirt haben.

Ferner sei $x = 0,13636...$; so wird

$$100x = 13,636$$
$$x = 0,136$$

$99x = 13,5$ und $x = \frac{13,5}{99} = {}^{135}/_{990} = {}^{3}/_{22}$.

In diesen Betrachtungen haben wir den Grundsatz und das allgemeine Gesetz zur Anwendung gebracht: Gleiche Größen, auf gleiche Art verändert, bleiben auch nach der Veränderung einander gleich.

Nun wird man auch gleich finden, daß 0,99999.... $= {}^{9}/_{9} = 1$ ist.

Auch wird man leicht begreifen, daß, wenn in die Rechnungsoperationen unendliche Decimalbrüche eingehen, die Ergebnisse nicht in der größten Strenge richtig oder ganz genau sein können. Man addire z. B.

$${}^{4}/_{7} = 0,5714....$$
$${}^{3}/_{7} = 0,4285....$$

so ist $1 = 0,9999....$

Wir wissen aber schon, daß der unendliche Decimalbruch 0,9999....=1 in Wahrheit ist.

§. 77. Wenn bei der Multiplikation die Faktoren viele Decimalstellen haben oder auch unvollständige oder unendliche Decimalbrüche sind und das Ergebniß nur auf etliche Decimalstellen genau zu sein braucht, so kann man eine Abkürzung im Multipliciren anwenden, welche darin besteht, daß man mit den Ziffern des einen Faktors von der Linken gegen die Rechte multiplicirt d. h. mit der höchsten Ziffer desselben den Anfang macht und darnach sogleich die abzuschneidenden Decimalstellen bestimmt, und bei jedem folgenden Produkte, das die auf einander folgenden Ziffern eines Faktors geben, allemal eine Decimalstelle des andern Faktors rückwärts weniger nimmt. Die einzelnen Produkte werden dann so untergesetzt, daß die letzten Ziffern zur Rechten gerade unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 7{,}034582 \\ 0{,}5173 \\ \hline 35172910 \\ 703458 \\ 492415 \\ 21102 \\ \hline 3{,}6389885 \end{array}$$

So kann man auch beim Dividiren, wenn man an die Decimalstellen im Quotienten kommt, bei jeder neuen Ziffer des Quotienten eine letzte Ziffer des Divisors nach der andern weglassen. Z. B.

```
3,1415926 | 1,00000000 (0,31830992
             94247778
             --------
              5752222
              3141592
             --------
              2610630
              2513272
             --------
                97358
                94245
             --------
                 3113
                 2826
             --------
                  287
                  279
             --------
                    8
```

§. 78. Wie vortheilhaft und bequem öfters die Rechnung mit Decimalbrüchen, besonders im Vergleich mit den gemeinen Brüchen, sei, kann man leicht wahrnehmen, wenn man folgende Brüche: $^6/_7$, $^4/_9$, $^7/_{13}$, $^8/_{17}$, $^{13}/_{20}$ und $^{22}/_{29}$ einmal nach (§. 49.) addirt, und das anderemal in Decimalbrüche (nach §. 71.) verwandelt und dann gleichfalls (nach §. 62.) addirt. Die erste Verrichtung wird höchst mühsam, die andere sehr leicht von statten gehen.

---

## Viertes Kapitel.

### Die vier Species in benannten Zahlen.

---

§. 79. Eine Zahl, bei welcher man einzig und allein die Menge ihrer Einheiten betrachtet, heißt eine unbenannte Zahl, z. B. 12. Wenn man sie aber auf einen bestimmten Gegenstand beziehet oder anwen-

det, so heißt sie benannt, z. B. 12 Gulden, oder 12 Pfunde u. s. w.

§. 80. Die Rechnungen in benannten Zahlen sind nicht als neue oder abweichende zu betrachten; denn 36 + 24 = 60, ob die Zahlen 36, 24, 60 sich auf bestimmte Gegenstände beziehen oder nicht.

Nur kömmt es bei diesen Rechnungen in benannten Zahlen häufig vor, daß Größen einer Art in Größen einer andern verwandelt werden müssen, z. B. Kreuzer in Gulden, Lothe in Pfunde u. s. w. oder umgekehrt Gulden in Kreuzer, Centner in Pfunde u. s. w. Das Verfahren, wodurch dieses geschieht, heißt das Reduciren (Zurückführen) der einen Größe auf die andere.

§. 81. Die Einheit einer Größe, welche mehre Einheiten einer andern Art von Größe enthält, wollen wir die höhere Einheit nennen; und die Einheit einer Größe, von welcher mehre Einheiten auf die Einheit einer andern Art von Größe gehen, soll die niedrigere heißen. Um nun Größen in einander verwandeln zu können, muß man wissen, wie viel niedrigere Einheiten eine größere Einheit enthält, oder wie viele niedrigere Einheiten in einer größern enthalten sind. Das Allgemeinste davon ist:

1 fl. rhein. = 60 Kr.; 1 Kr. = 4 Pf.; 1 Pf. = 2 Heller; oder 1 fl. = 16 gute Gr. und 1 g. Gr. = 3 Kr. 3 Pf.; oder 1 fl. = 20 leichte Gr.; 1 l. Gr. = 3 Kr.; oder 1 fl. = 12 gute Batzen; 1 g. Batzen = 5 Kr.; oder 1 fl. = 15 leichte Batzen; 1 leichter Batzen = 4 Kr.

1 Rthlr. (Reichsthaler) = 90 Kr. = 24 g. Gr. = 30 l. Gr.

1 Thlr. in Preußen hält 24 g. Groschen und der Gro=

schen 12 Pfennige. Seit dem Jahre 1823 wird der Thaler auch in 30 Silbergroschen und der Silbergroschen in 12 Pfennige Scheidemünze getheilt.

1 Thlr. in Sachsen wird jetzt auch in 30 Neugroschen, aber der Neugroschen in 10 Neupfennige getheilt.

1 Mark in Hamburg und anderwärts beträgt 16 Schillinge, und 1 Schilling 12 Pfennige.

1 Laubthlr. = 2 fl. 45 Kr. und 4 Laubthlr. = 11 fl.

1 Kronenthlr. = 2 fl. 42 Kr. und 10 Kronenthlr. = 27 fl.

1 Konventthlr. = 2 fl. 24 Kr. und 5 Konventthlr. = 12 fl.

1 preuß. Thlr. = 1 fl. 45 Kr. und 4 preuß. Thlr. = 7 fl.; ferner 1 Silbergr. = 3 Kr. 2 Pfennige.

1 sächs. Thlr. = 1 fl. 48 Kr. und 5 sächs. Thlr. = 9 fl. rhl.

1 Dukaten = 5 fl. 30 Kr. im Durchschnitt; 1 Louisdor = 9 fl. 36 Kr. rhl.; 1 Karolin = 11 fl. auch 12 fl.

1 Ctl. = 100 Pfd.; in einigen Ländern = 110 Pfd.; 1 Pfd. = 32 Loth; 1 Loth = 4 Quint oder Quentchen; 1 Quint = 4 Pfennige.

1 Stein = 1/5 Ctr. Wenn daher der Ctr. zu 100 Pfd. angenommen wird, so hält der Stein 20 Pfd; wenn aber derselbe zu 110 Pfd. gerechnet wird, so gehen 22 Pfd. auf den Stein.

1 Mark Gold = 16 Loth; 1 Loth = 1 1/2 Karat; 1 Karat = 12 Grän; oder 1 Loth = 18 Grän.

1 Mark Silber = 8 Unzen; eine Unze = 2 Loth; 1 Loth = 18 Grän.

1 Pfund Apothekerwaare = 12 Unzen; 1 Unze = 2 Loth = 8 Drachmen; 1 Drachme = 3 Skrupel; 1 Skrupel = 20 Gran.

1 Pack beträgt 10 Tuch; 1 Ballen Tuch hält 12 Tücher, und 1 Tuch hält 32 Ellen.

1 Ballen Papier = 10 Ries; 1 Ries = 20 Buch; 1 Buch = 24 Bogen.

Die bayerische Elle hält 2 Fuß und $10^1/_4$ bayerische Duodecimalzoll.

Ein bayerisches Tagwerk oder Jauchert ist 200 Fuß lang und eben so breit, und hält 40000 Quadratfuß oder 400 Quadratruthen.

Der $^1/_{100}$ Theil eines bayerischen Tagwerks oder Morgens heißt eine Decimale und beträgt also 400 Quadratfuß.

Die bayerische Holzklafter beträgt 126 bayerische Kubikfuß, und die gesetzmäßige Scheiterlänge ist $3^1/_2$ Fuß.

Die bayerische Maaß soll genau 43 bayerische Decimalkubikzolle oder 74,304 bayer. Duodecimalkubikzolle oder 53,8923 pariser Duodecimalkubikzolle halten.

Der bayerische Scheffel, welcher in 6 Metzen getheilt wird, soll 208 bayerische Maaß oder 8944 bayer. Decimalkubikzolle oder 15455,232 bayer. Duodecimalkubikzolle oder 11209,5984 pariser Duodecimalkubikzolle in sich halten.

Der bayerische Visir-Eimer, wie er an die Wirthe abgegeben wird, hält 64 bayerische Maaß, mithin 2752 bayer. Decimalkubikzolle oder 4755,456 bayer. Duodecimalkubikzolle oder 3449,1072 pariser Kubikzolle. Dagegen hat der bayer. Schenk-Eimer nur 60 Maaß oder 2580 bayer. Decimalkubikzoll oder 3233,538 pariser Kubikzoll.

1 Ohm hält gewöhnlich 2 Eimer.

Für Angaben aus dem Mittelalter ist zu merken:

1 Pfd. Heller = 4 fl. oder nach Andern nur = 3 fl.

1 Pfd. neuer Heller oder 1 Pfd. Silbers = 30 Rthlr.

1 Schock böhmische Groschen = 4 fl.

1 Schock sächsische Groschen = 20 Groschen meißnisch.

§. 82. Kennt man nun die verschiedenen Eintheilungen aller Größen, so hat es gar keine Schwierig-

keit, die verschiedenartigen Größen in einander zu verwandeln. Nämlich:

1) um Größen einer niedrigern Art in Größen einer höhern Art zu verwandeln, dividire man die gegebene Menge der niedrigern Einheiten durch die Zahl, welche angibt, wie viele niedrigere Einheiten in einer größern Einheit enthalten sind. Wenn die niedrigere Art keine ganze Einheit der höhern enthält, so wird die Division blos angezeigt und der Werth erscheint als ächter Bruch. Z. B. wie viel Gulden machen 37108 Kr. aus?

```
60|37108|618 fl.
   36  0
   -----
    11
     6
    ----
     50
     48
    ----
     28 Kr. bleiben zum Rest
```

d. h. 37108 Kr. = 618 fl. 28 Kr.

Deßgleichen sind 25 Kr. = $^{25}/_{60}$ = $^{5}/_{12}$ fl.; 48 Kr. = $^{48}/_{60}$ = $^{4}/_{5}$ fl.; 40 Pfd. = $^{40}/_{100}$ = $^{2}/_{5}$ Ctr.; 18 Loth = $^{18}/_{32}$ = $^{9}/_{16}$ Pfd.; ferner 15 g. Gr. = $^{15}/_{24}$ = $^{5}/_{8}$ Thlr., aber 15 Silbergr. = $^{15}/_{30}$ = $^{1}/_{2}$ Thlr. Eben so verwandelt man selbst Brüche in Größen einer höhern Art. Z. B. $^{3}/_{4}$ Gr. = $^{3}/_{4}$ : 24 = $^{3}/_{96}$ = $^{1}/_{32}$ Thlr. Ferner $^{7}/_{8}$ Silbergroschen = $^{7}/_{8}$ : 30 = $^{7}/_{240}$ Thlr. Eben so $^{1}/_{2}$ Loth = $^{1}/_{2}$ : 32 = $^{1}/_{64}$ Pfd. Endlich $^{2}/_{3}$ Pfennig = $^{2}/_{3}$ : 4 = $^{2}/_{12}$ = $^{1}/_{6}$ Kr. und 16,8 Kr. = $\frac{16,8}{60}$ fl. = 0,28 fl.

**2) Um eine Menge von Größen irgend einer Art in Größen einer kleinern Art zu verwandeln, multiplicire man die gegebene Menge der größern Art mit der Zahl, welche angibt, wie viele niedrigere**

Einheiten Eine höhere in sich enthält. Z. B. 14 Pfund sollen in Lothe verwandelt werden; so erhält man

$14 \times 32 = 448$ Lothe.

Auf die nämliche Weise wird verfahren, wenn Brüche einer Größe in eine niedrigere Art von Größen sollen verwandelt werden. Z. B. $\frac{4}{5}$ fl. $= \frac{4}{5} \times 60 = 48$ Kr. und $\frac{2}{7}$ Thlr. $= \frac{2}{7} \times 24 = 6\frac{6}{7}$ Gr. $= 6$ Gr. $+ \frac{6}{7} \times 12$ Pf. $= 6$ Gr. $10\frac{2}{7}$ Pf., aber auch $\frac{2}{7}$ Thlr. $= \frac{2}{7} \times 30 = 8\frac{4}{7}$ Silbergroschen $= 8$ Silbergr. $+ \frac{4}{7} \times 12$ Pf. $= 8$ Silbergr. $6\frac{6}{7}$ Pf. Scheidemünze. Eben so $\frac{5}{8}$ Pfd. $= \frac{5}{8} \times 32 = 20$ Loth, und $\frac{2}{5}$ Ctl. $= \frac{2}{5} \times 100 = 40$ Pfd.; aber in Preußen $\frac{2}{5}$ Ctl. $= \frac{2}{5} \times 110 = 44$ Pfd.

Endlich bemerke man noch, daß in der Multiplikation der Multiplikator immer eine unbenannte Zahl sein muß, indem es Unsinn ist, zwei benannte Zahlen mit einander zu multipliciren. Darum kann in der Division der Divisor eine unbenannte Zahl oder eine benannte sein. Im ersteren Falle wird der Quotient eine benannte Zahl, im anderen eine unbenannte.

§. 83. Aufg. Benannte Zahlen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die Größen von einerlei Art nach den bisherigen Grundsätzen gehörig unter einander, und zwar die niedrigste Art in die erste Kolumne zur Rechten, und dann immer die nächsthöhere in die nächstfolgende Kolumne. Alsdann zähle man, von der niedrigsten Art anfangend, die Zahlen einer jeden Art zusammen; und wenn die Summe der kleinern Einheiten auch Einheiten der nächsthöhern Art enthält, so verwandle man sie in dieselben, und schreibe nur den Rest unter die kleinern Einheiten; die größern zähle man zu den nächstfolgenden Einheiten. Z. B.

| fl. | Kr. | Pf. | Ctl. | Pfd. | Lth. |
|---|---|---|---|---|---|
| 3100 | 18 | 3 | 8 | — | 16 |
| 45 | 7 | 1 | 12 | 24 | $7^1/_3$ |
| 1856 | — | 2 | — | 58 | $2^1/_2$ |
| 690 | 36 | — | 16 | 29 | — |
| 5692 fl. | 2 Kr. | 2 Pf. | 37 Ctl. | 11 Pfd. | $25^5/_6$ Lth. |

§. 84. Beispiele zur Uebung im Addiren sind:

1)

| Thlr. | Gr. | Pf. |
|---|---|---|
| 2148 | 17 | $3^1/_4$ |
| 506 | — | 10 |
| 4223 | 12 | $8^2/_3$ |
| 15 | 20 | — |
| 691 | 8 | $5^3/_8$ |
| 3079 | 14 | 6 |

2)

| Ctl. | Pfd. |
|---|---|
| 403 | $16^2/_5$ |
| 18 | 3 |
| 642 | $28^7/_9$ |
| — | 25 |
| 1227 | $4^1/_3$ |
| 315 | $7^1/_3$ |

3)

| Mark | Schillinge | Pf. |
|---|---|---|
| 1346 | 12 | $5^1/_8$ |
| 4429 | 6 | $7^1/_3$ |
| 563 | 10 | — |
| 2071 | 3 | $2^3/_5$ |
| 60782 | 8 | — |
| 146 | 4 | $8^4/_7$ |
| 7198 | — | $4^1/_4$ |
| 41927 | — | 2 |
| 3539 | 14 | $9^5/_8$ |

4)

| Scheffel | Metzen |
|---|---|
| 17 | $3^2/_5$ |
| 108 | 5 |
| — | $4^4/_9$ |
| 20 | $1^3/_7$ |
| 46 | — |
| 302 | $5^1/_2$ |
| 87 | $1^7/_{12}$ |
| 35 | — |
| 408 | $2^5/_6$ |

5)

| Thlr. | Slbrgr. | Pf. |
|---|---|---|
| 144 | 17 | 3 |
| 805 | 20 | $4^1/_2$ |
| 732 | 9 | $2^1/_5$ |
| 1410 | 28 | $7^2/_3$ |
| 900 | 16 | $8^1/_4$ |
| 685 | 25 | 9 |

6) Ctl. Pfd. Lth. in Preuß.

| Ctl. | Pfd. | Lth. |
|---|---|---|
| 28 | 13 | $6^1/_2$ |
| 30 | 22 | 7 |
| 56 | — | $12^5/_8$ |
| 81 | 34 | — |
| 72 | 41 | $26^4/_7$ |
| 13 | 8 | $3^1/_4$ |

7)

| fl. | Kr. | Pf. |
|---|---|---|
| 236 | 51 | $3^1/_2$ |
| 45 | 20 | $2^1/_5$ |
| 3780 | 33 | $1^7/_8$ |
| 427 | 14 | — |
| 832 | 8 | $2^1/_3$ |
| 1786 | 12 | $2^1/_4$ |
| 904 | 17 | — |
| 28 | 42 | $1^1/_2$ |

8)

| Ctl. | Pfd. | Lth. | Quint |
|---|---|---|---|
| 6 | 51 | 13 | $3^1/_2$ |
| 12 | 87 | 16 | 2 |
| 23 | 26 | 4 | $1^3/_8$ |
| 87 | 32 | 18 | 3 |
| 19 | 6 | 3 | $2^1/_4$ |
| — | 96 | 15 | — |
| 71 | 13 | 20 | $1^3/_5$ |
| 16 | 72 | 12 | — |

9)

| Scheffel | Metzen |
|---|---|
| 417 | $5^1/_2$ |
| 83 | 2 |
| 127 | $3^1/_6$ |
| 92 | 4 |
| 315 | $2^7/_8$ |
| 29 | — |

10)

| fl. | Kr. | Pf. |
|---|---|---|
| 2136 | 15 | 3 |
| 820 | 56 | $2^3/_8$ |
| 3045 | 38 | 1 |
| 752 | 47 | $3^2/_5$ |
| 1364 | 22 | — |
| 632 | 43 | $2^1/_8$ |

11)

| Thlr. | Sgr. | Spf. |
|---|---|---|
| 25 | 13 | $6^3/_5$ |
| 314 | 26 | 8 |
| 728 | 17 | $3^1/_6$ |
| 93 | 9 | 9 |
| 254 | 12 | $4^1/_2$ |
| 3637 | 29 | $5^2/_{15}$ |

12)

| Pfund | Loth |
|---|---|
| 87 | $18^3/_4$ |
| 132 | 24 |
| 64 | $12^3/_8$ |
| 95 | 6 |
| 877 | $23^7/_8$ |
| 645 | $30^1/_2$ |

§. 85. **Aufg.** Benannte Zahlen von einander abzuziehen.

**Aufl.** Man schreibe die Zahlen einer jeden Art, wie vorhin bei der Addition, gehörig unter einander, fange das Abziehen bei der kleinern Art an und schreite so fort bis zu der größten, damit man nöthigenfalls eine größere Einheit zu den geringern borgen kann. Dabei übersehe man nicht, daß die geborgte Einheit

nicht, wie bei unbenannten Zahlen, gerade 10 Einheiten der nächstniedrigern enthalten müsse, sondern nach Verschiedenheit der Größen einen verschiedenen Werth hat. Denn wenn man von Gulden eine Einheit zu Kreuzern borgt, so bedeutet dieser Gulden natürlich 60 Kr.; ebenso ein Loth, zu Quinten geborgt, gilt 4 Quinte u. s. w. Beispiele:

| Thlr. | Gr. | Pf. | Pf. | Lth. | Q. |
|---|---|---|---|---|---|
| 614 | 17 | $3^1/_8$ | 13 | 2 | 2 |
| 400 | 20 | $1^4/_5$ | 7 | 15 | 3 |
| 213 Thl. | 21 Gr. | $1^{13}/_{40}$ Pf. | 5 Pfd. | 18 Lth. | 3 Q. |

Wie alt war Jemand am 30. Januar 1814, welcher den 6. Mai 1780 geboren ist? Hier muß man die Zeit der Geburt von der Jahreszahl abziehen, in welcher man nach seinem Alter fragt.

| Jahre | Monate | Tage |
|---|---|---|
| 1813 | — | 30 |
| 1779 | 4 | 6 |
| 33 Jahre | 8 Monate | 24 Tage. |

nämlich am 30. Januar ist noch kein Monat im Jahre verflossen, sondern erst 30 Tage; und am 6. Mai zählt man 4 Monate und 6 Tage des Jahrs. Ueberdieß ist das Jahr 1814 erst mit dem letzten December geendigt; eben so auch das Jahr 1780. Darum muß man 1813 anstatt 1814, und 1779 anstatt 1780 ansetzen.

Wie alt war die nämliche Person am 4. Juli 1818?

| Jahre | Monate | Tage |
|---|---|---|
| 1817 | 6 | 4 |
| 1779 | 4 | 6 |
| 38 Jahre | 1 Monat | 28 Tage. |

§. 86. Beispiele im Abziehen benannter Zahlen sind:

| 1) | fl. | Kr. | Pf. |
|---|---|---|---|
| | 5263 | 49 | 2 |
| | 814 | 56 | 3 |

| 2) | Ctr. | Pfd. | Loth |
|---|---|---|---|
| | 152 | 13 | $8\frac{4}{7}$ |
| | 67 | 42 | $15\frac{8}{9}$ |

| 3) | Pfd. | Lth. | Q. |
|---|---|---|---|
| | 86 | 13 | $1\frac{1}{6}$ |
| | 25 | 18 | $2\frac{4}{9}$ |

| 4) | Thlr. | Gr. | Pf. |
|---|---|---|---|
| | 17 | 22 | $9\frac{2}{5}$ |
| | 5 | 8 | $9\frac{4}{5}$ |

5) Wie alt ist eine Person geworden, welche am 7. Julius 1742 geboren worden, und den 19. September 1822 gestorben ist?

6) Friedrich der Einzige wurde geboren 1712, den 24. Januar, und starb den 17. August 1786. Wie alt ist er geworden?

7) Eine Schuldverschreibung wurde den 18. August 1843 ausgestellt und den 30. Januar 1848 das Kapital zurückgezahlt. Wie lange stand dieses aus?

8) Jemand ist den 12. April 1743 geboren und den 6. März 1812 gestorben. Wie alt ist er geworden?

9) Wie lang ist der Zeitraum von 1777 den 13. December bis zum 24. Juli 1825?

10) Ein Kapital wurde den 26. Februar 1837 aufgenommen und bis zum 14. September 1840 wurden keine Zinsen gezahlt. Wie viel Jahre, Monate und Tage beträgt dieß?

11) Jemand, welcher den 7. Juli 1808 geboren ward, heurathete den 1. Januar 1840. Wie alt war er?

12) Wenn Jemand den 12. Mai 1825 geboren ist und den 13. October 1843 die Universität bezogen hat: wie alt ist er gewesen?

§. 87. Aufg. Eine benannte Zahl mit einer unbenannten zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire einen jeden Theil des Multiplikanden besonders mit dem Multiplikator, so daß man von den niedrigern Einheiten anfängt und zu den höhern fortschreitet, und verwandle die niedrigern nöthigenfalls in höhere, und addire diese zum Produkte der nächsthöhern; die übrigbleibenden niedern aber werden unter ihre gehörigen Einheiten gesetzt. Z. B. Wie viel betragen 470 Kronenthaler, wenn ein jeder 2 fl. 42 Kr. gilt?

| | fl. | Kr. | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 42 | (470 |
| | 940 fl. | 19740 Kr. | |
| oder | 1269 fl. | — Kr. | |

Was wiegen 6 Kisten zusammen, wenn jede 2 Ctl. 14 Pfd. und 15 Loth schwer ist?

| | Ctl. | Pfd. | Lth. | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 14 | 15 | (6 |
| | 12 Ctl. | 84 Pfd. | 90 Lth. | |
| oder | 12 Ctl. | 86 Pfd. | 26 Loth. | |

§. 88. Uebungsbeispiele für die Multiplikation mit benannten Zahlen.

1) Es sind 8 Personen vorhanden; an jede soll 1 fl. 45 kr. ausgezahlt werden. Wie viel beträgt dieß?

2) Jedem von 17 Alumnen soll 1 Thlr. 8 Gr. 3 Pf. bezahlt werden. Wie viel macht das Ganze?

3) Ein Fuhrmann ladet 10 Kisten ab; in jeder befinden sich 3 Ctl. 45 Pfd. und $5^3/_8$ Loth. Wie viel an Gewicht macht Alles?

4) An 7 verunglückte Gemeinden soll Getraide abgegeben werden, und zwar an jede 86 Scheffel $4^3/_5$ Metzen. Wie viel beträgt das Ganze?

5) In Hamburg sollen 38 Schillinge und 3 Pfennige $32^1/_8$mal ausbezahlt werden. Dieß beträgt?

6) 13 Thlr. $7^1/_2$ Gr. durch $9^5/_8$ multiplicirt: wie viel macht dieß?

§. 89. Aufg. Eine benannte Zahl durch eine unbenannte oder benannte zu dividiren.

Aufl. Im ersten Falle dividire man jeden Theil des Dividenden von den höchsten Einheiten an stufenweise bis zu den niedrigsten und schreibe jeden Quotienten unter die ihm zugehörigen Einheiten. Wenn irgendwo ein Rest bleibt, so verwandle man ihn in die nächstniedrigen Einheiten und zähle sie zu denen, zu welchen sie gehören; die dadurch erhaltene Zahl dividire man statt des einzelnen gegebenen Theils des Dividenden. Z. B. Es haben sich 12 Personen in 100 Thlr. 19 Gr. und 6 Pf. zu theilen; wie viel erhält jede?

| | Thlr. | g. Gr. | Pf. | |
|---|---|---|---|---|
| 12) | 100 | 19 | 6 | |
| | 8 Thlr. | 9 Gr. | $7^1/_2$ Pf. | erhält jede Person. |

Man kann aber auch so verfahren, daß man alle höhern Einheiten in die niedrigsten Einheiten verwandelt und dann erst dividirt. Z. B. 100 Thlr. 19 Gr. 6 Pf. = 29034 Pf., welche die nämliche Theilungs=Summe geben werden.

Sind Dividend und Divisor benannte Zahlen, so müssen ohnehin beide auf einerlei Zahlen=Einheit gebracht sein. Alsdann wird, wie gewöhnlich, dividirt.

§. 90. Andere Beispiele für die Division benannter Zahlen sind:

1) Es haben sich 16 Alumnen in 65 fl. rhl. zu theilen. Wie viel kommt auf jeden?

2) Man soll 4 Thlr. 7 Gr. 9 Pf. unter 8 Personen vertheilen. Was trifft die Person?

3) Wie groß ist der 12te Theil von 83 Ctr. 64 Pfd. und $15^1/_3$ Loth?

4) An 15 abgebrannte Familien werden 36 Scheffel $3^3/_4$ Metzen Roggen abgeliefert zur gleichheitlichen Vertheilung Wie viel kommt auf eine Familie?

5) Es haben 6 Bauernhöfe 81 Scheffel 5 Metzen Haber zu liefern. Wie viel trifft einen jeden?

6) Man soll 13 Thlr. 5 Silbergroschen und $3^3/_4$ Pf. preußl. durch $5^3/_4$ theilen. Was kommt zum Quotienten?

7) Ein Haufen Holz von $26^1/_4$ Klaftern, soll so vertheilt werden, daß jede Person $1^3/_4$ Klaftern erhalte. Für wie viele Personen reicht dieses Holz hin?

8) Bei einer Geldvertheilung von 112 fl. kamen auf jede Person 6 fl. 13 Kr. $1^1/_3$ Pfennige. Wie viele Personen konnten hiebei betheiliget sein?

§. 91. Die Probe über die Rechnungen in benannten Zahlen wird eben so gemacht, wie bei den Rechnungsarten in unbenannten Zahlen; daher ist es nicht nöthig, hier noch besonders davon zu handeln.

---

## Fünftes Kapitel.

## Von den Verhältnissen und Proportionen, nebst deren Anwendung auf die Regel de Tri, de Quinque rc., Kettenregel, Gesellschafts- und Vermischungs-Rechnung.

---

### Verhältnisse und Proportionen.

§. 92. Wenn man zwei Zahlen mit einander vergleicht, und nachsieht, wie viele Einheiten die eine mehr hat als die andere, so betrachtet man die-

ser Zahlen arithmetisches Verhältniß; wenn man aber untersucht, wie vielmal oder wie oft die eine Zahl die andere in sich enthält, so hat man ihr geometrisches Verhältniß. Z. B. Der Zahlen 20 und 5 arithmetisches Verhältniß ist $20 - 5 = 15$, und ihr geometrisches ist $^{20}/_{5}$ oder $20 : 5 = 4$.

§. 93. Man sieht, daß das arithmetische Verhältniß durch die Subtraktion, das geometrische aber durch die Division bestimmt wird. Und in der That sind auch arithmetische Verhältnisse nichts anders als Unterschiede, und geometrische nichts anders als Quotienten oder Brüche. Darum hat man auch die nämliche Bezeichnung beibehalten; und was von den Quotienten oder Brüchen gilt, das wird auch von den geometrischen Verhältnissen gelten.

§. 94. Die Zahlen, welche mit einander verglichen werden, heißen die Glieder des Verhältnisses, und zwar die erste das vorhergehende oder das Vorderglied, und die zweite das nachfolgende oder das Hinterglied. Diejenige Zahl, welche die Größe des Verhältnisses ausdrückt, heißt überhaupt der Verhältnißname, und insbesondere bei dem arithmetischen Verhältnisse der Unterschied, und bei dem geometrischen der Exponent. So ist z. B. im $15 - 3$ die Zahl 12 der Unterschied, und in $15 : 3$ ist 5 der Exponent.

§. 95. Ein Verhältniß heißt ein steigendes, wenn das zweite Glied größer als das erste ist; es heißt ein fallendes, wenn das zweite Glied kleiner als das erste ist.

§. 96. Arithmetische Verhältnisse sind gleich, wenn die Unterschiede ihrer Glieder einander gleich sind; und geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn

ihre Exponenten einander gleich sind. So sind z. B. 13 — 6; 21 — 14 und 56 — 49 gleiche arithmetische Verhältnisse; eben so sind 18 : 6 und 42 : 14 gleiche geometrische Verhältnisse. Dabei verlangt es die Natur der Verhältnisse, daß nur ein steigendes Verhältniß einem steigenden, und ein fallendes nur einem fallenden gleich sein könne.

§. 97. Zwei gleiche Verhältnisse bilden zusammen eine Proportion, welche demnach sowohl eine arithmetische als eine geometrische sein kann, je nachdem die zusammengestellten Verhältnisse arithmetische oder geometrische sind. Jede enthält vier Glieder, von denen das erste und vierte die äußern, das zweite und dritte aber die mittlern Proportionalglieder heißen. Z. B. 14 — 6 = 23 — 15 ist eine arithmetische, und 12 : 6 = 18 : 9 ist eine geometrische Proportion. Natürlich können zu einer richtigen Proportion entweder nur gleiche steigende oder nur gleiche fallende Verhältnisse verbunden werden. Die arithmetische Proportion kann man auch Differenz-Proportion, und die geometrische Quotienten-Proportion nennen.

Sind die mittlern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig oder zusammenhängend; im entgegengesetzten Falle aber abgesondert oder getrennt. Die vorigen Proportionen sind abgesonderte; aber 20 — 16 = 16 — 12; eben so 36 : 12 = 12 : 4 sind stetige.

Wenn übrigens von Verhältnissen oder Proportionen schlechtweg die Rede ist, ohne daß arithmetische ausdrücklich genannt werden: so sind gewöhnlich geometrische zu verstehen.

§. 98. Grundsatz. Gleiche Größen auf gleiche

Art abgeändert bleiben auch nach dieser Aenderung einander gleich. Und wenn von zwei gleichen Größen die eine abgeändert wird, so muß, wenn die Gleichheit erhalten werden soll, auch die andere auf gleiche Art abgeändert werden.

§. 99. Satz. In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder eben so groß als die Summe der mittlern.

Beweis. Das erste Glied hat eben so viele Einheiten mehr oder weniger als das zweite, so viele das letzte weniger oder mehr enthält als das dritte. Um so viel also das eine der äußern Glieder das eine der mittlern an Größe übertrifft, um eben so viel wird das andere der äußern Glieder von dem andern der mittlern an Größe übertroffen; folglich muß die Summe von beiden gleich groß sein. Z. B. $8 - 5 = 14 - 11$ und $8 + 11 = 5 + 14$; eben so $7 - 9 = 4 - 6$ und $7 + 6 = 9 + 4$.

§. 100. Umgekehrt findet eine arithmetische Proportion statt, wenn vier Zahlen so beschaffen sind, daß die Summe der äußern und mittlern Glieder einander gleich ist, z. B. 1, 5, 6, 10.

§. 101. In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich dem doppelten mittlern; denn $16 - 12 = 12 - 8$ und $16 + 8 = 12 + 12 = 2 . 12$.

§. 102. Man findet also das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion, wenn man die Summe der beiden äußern Glieder halbirt, z. B. zwischen 16 und 8 ist das mittlere Glied $= \frac{16 + 8}{2} = {}^{24}/_{2} = 12$ wie vorhin §. 101.

§. 103. Das mittlere Glied einer stetigen arith-

metischen Proportion nennt man auch das arithmetische Mittel. Und diesen Ausdruck gebraucht man noch in weiterm Sinne, und versteht darunter eine mittlere Zahl zwischen mehren andern, nämlich diejenige Zahl, die man findet, wenn man die gegebenen addirt und ihre Summe durch die Anzahl der Zahlen dividirt. Hievon macht man im Leben häufig Gebrauch, z. B. wenn man die mittlern Einkünfte eines Gutes, Amtes, Gewerbes, die mittlere Anzahl der Gebornen, Gestorbenen in einem Orte oder Lande wissen will. Ein Gut z. B. trage in 6 Jahren nacheinander folgende Einkünfte: 451, 622, 487, 536, 395, 474 fl. Dieß gibt auf alle 6 Jahre zusammen 2965 fl. Einkünfte, folglich im Mittel auf Ein Jahr $494^1/_6$ fl.

§. 104. Beispiele für Fälle, wo zwischen mehren Zahlen eine mittlere gesucht werden soll, sind:

1) ein Gewerb bringt in 10 Jahren nach einander alljährlich ein: 1) 736 fl. 2) 689 fl. 3) 496 fl. 4) 532 fl. 5) 718 fl. 6) 745 fl. 7) 671 fl. 8) 800 fl. 9) 805 fl. 10) 683 fl. Wie viel ist auf Ein Jahr im Durchschnitt zu rechnen?

2) Ein Amt trägt 8 Jahre nach einander Folgendes ein: 1) $935^1/_2$ fl. 2) $788^2/_3$ fl. 3) 814 fl. 4) $920^5/_7$ fl. 5) $942^1/_5$ fl. 6) 895 fl. 7) $913^2/_5$ fl. 8) $836^1/_8$ fl. Wie viel kann man auf jedes Jahr im Durchschnitte rechnen?

3) Ein Kaufmann hat in einer Woche an Waaren verkauft: Sonntags für 12 Thlr. 8 Gr. 1 Pf.; Montags für 15 Thlr. 7 Gr. 3 Pf.; Dienstags für 18 Thlr. 4 Pf.; Mittwochs für 12 Thlr. 17 Gr.; Donnerstags für 18 Thlr. 1 Gr. 11 Pf.; Freitags

für 15 Thlr. 23 Gr.; Sonnabends für 19 Thlr. Wie viel hat er täglich im Durchschnitte eingenommen?

4) Eine Pfarrei trug in 12 Jahren nach einander Folgendes ein: 1) 1025 fl. 36 Kr. 3 Pf. 2) 1156 fl. 12 Kr. 2 Pf. 3) 986 fl. 28 Kr. 4) 1075 fl. 21 Kr. 1 Pf. 5) 1200 fl. 47 Kr. 1 Pf. 6) 1253 fl. 2 Pf. 7) 1124 fl. 18 Kr. 2 Pf. 8) 1022 fl. 3 Pf. 9) 1096 fl. 8 Kr. 1 Pf. 10) 1181 fl. 4 Kr. 3 Pf. 11) 1212 fl. 56 Kr. und 12) 987 fl. 40 Kr. Wie viel ist auf Ein Jahr im Durchschnitt zu rechnen?

5) Die Gebornen einer Gemeine betrugen 10 Jahre nach einander: 1) 784 Seelen; 2) 805; 3) 708; 4) 802; 5) 806; 6) 783; 7) 792; 8) 812; 9) 801; 10) 797. Wie viel Geborne darf man auf jedes Jahr im Durchschnitt rechnen?

6) In 10 auf einander folgenden Jahren war die Sterblichkeit in einem gewissen Orte folgende: 1) 780 Personen; 2) 799; 3) 800; 4) 804; 5) 778; 6) 783; 7) 801; 8) 799; 9) 776 und 10) 794 Personen. Wie hoch kann man die Sterblichkeit an diesem Orte im Durchschnitt annehmen?

§. 105. Das vierte Glied einer arithmetischen Proportion findet man, wenn man von der Summe der beiden mittlern Glieder das erste Glied abzieht; denn es bezeichne x das unbekannte vierte Glied, so hat man z. B. $18 - 15 = 13 - x$; also $x + 18 = 15 + 13$ und $x = 15 + 13 - 18 = 10$. In der That ist auch jetzt $18 - 15 = 13 - 10$.

§. 106. Satz. In jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äußern Glieder dem Produkte der beiden mittlern gleich.

I. Beweis. Es sei eine ganz nach Belieben gewählte Proportion

$$5 : 8 = 15 : 24$$

so läßt sich dafür auch schreiben (nach §. 93)

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

und vermöge §. 98 bleibt auch noch

$$8 \cdot \frac{5}{8} = 8 \cdot \frac{15}{24}$$

$$\text{und } 8 \cdot \frac{5}{8} \cdot 24 = 8 \cdot \frac{15}{24} \cdot 24.$$

Dadurch fallen die Nenner weg; denn $8 \cdot \frac{5}{8} = 5$ und $\frac{15}{24} \cdot 24 = 15$; und man erhält

$$5 \cdot 24 = 8 \cdot 15 \text{ oder } 120 = 120.$$

Dieses läßt sich auf die nämliche Weise von jeder andern Proportion beweisen. Und da es hier nicht auf die Größe der einzelnen Zahlen, sondern auf ihre gegenseitige Stellung zu einander ankommt: so wird man das Allgemeine im Beweise leicht erkennen.

II. Bew. Die Exponenten in den beiden Verhältnissen der Proportion sind einander gleich; sonst fände keine Proportion statt. Nun bestehet das erste Glied aus dem Produkte des zweiten Gliedes in den Exponenten; demnach hat das Produkt der beiden äußern Glieder zu Faktoren 1) das zweite Glied, 2) den Exponenten und 3) das vierte Glied.

Das dritte Glied ist das Produkt aus dem vierten in den Exponenten; daher hat das Produkt der beiden mittlern Glieder zu Faktoren 1) das zweite Glied, 2) das vierte Glied und 3) den Exponenten.

Folglich hat das Produkt der äußern Glieder eben die Faktoren, wie das Produkt der mittlern; beide Produkte müssen also gleich sein. Z. B.

$$12 : 3 = 20 : 5.$$

Hier ist der Exponent 4; demnach kann man auch schreiben:

$$3 \cdot 4 : 3 = 5 \cdot 4 : 5.$$

Macht man nun die Produkte der äußern und mitt-

lern Glieder, so erhalten beide einerlei Faktoren und sind also gleich; nämlich

$$3 . 4 . 5 = 3 . 5 . 4 \text{ oder } 60 = 60.$$

§. 107. Umgekehrt kann man aus zwei gleichen Produkten immer eine geometrische Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produktes zu den äußern, die Faktoren des andern aber zu den mittlern Gliedern macht; z. B. $5 . 6 = 3 . 10$; hieraus wird $5 : 10 = 3 : 6$.

§. 108. Weil ein Quadrat das Produkt aus zwei gleichen Faktoren ist: so ist in einer stetigen geometrischen Proportion das Produkt der beiden äußern Glieder so groß, als das Quadrat des mittlern Gliedes; denn aus $3 : 6 = 6 : 12$ erhält man $3 . 12 = 6 . 6$ und ein solches mittleres Glied (hier 6) heißt auch die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen zwei Zahlen (hier zwischen 3 und 12).

§. 109. Satz. In jeder geometrischen Proportion lassen sich die beiden mittlern Glieder mit einander verwechseln.

Beweis. Es verhält sich

$$5 : 10 = 3 : 6$$

wofür man auch schreiben kann

$$5/_{10} = 3/_{6}.$$

Nun lassen sich an diesen zwei gleichen Zahlenausdrücken nach §. 98 folgende Aenderungen machen:

$$5/_{10} : 3 = 3/_{6} : 3 \text{ d. i. } \frac{5}{10 . 3} = \frac{3}{6 . 3};$$

$$\frac{5 . 10}{10 . 3} = \frac{3 . 10}{6 . 3} \text{ d. h. } 5/_{3} = 10/_{6}$$

wofür sich schreiben läßt

$$5 : 3 = 10 : 6$$

welches zu beweisen war und auch an jeder andern Proportion auf gleiche Art nachgewiesen werden kann.

§. 110. Aufg. Zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden.

Aufl. Man multiplicire das zweite und dritte Glied mit einander, und dividire ihr Produkt durch das erste; der Quotient gibt das verlangte vierte Glied.

Denn es seien z. B. die Zahlen 3, 15, 8 gegeben, und das unbekannte vierte Glied werde mit x bezeichnet: so ist

$$3 : 15 = 8 : x$$

hieraus erhält man (vermöge §. 106)

$$3 \cdot x = 15 \cdot 8.$$

Jetzt wissen wir schon das Dreifache der unbekannten Größe x; wir wollen aber blos das Einfache derselben kennen lernen. Dieß kann begreiflich gar leicht dadurch bewerkstelliget werden, daß wir $3 \cdot x$ durch 3 dividiren. Denn $\frac{3 \cdot x}{3} = 1 \cdot x = x$.

Nach §. 98 muß nun auch der Zahlenausdruck zur Rechten durch 3 dividirt werden; sonst bleiben die Größen einander nicht gleich. Dadurch erhält man

$$x = \frac{15 \cdot 8}{3} \text{ oder } x = 40.$$

Wirklich ist nun $3 : 15 = 8 : 40$ eine richtige Proportion, und aus dem Gange der Untersuchung wird man die Natürlichkeit und Richtigkeit, so wie die Allgemeinheit der vorgeschriebenen Regel ersehen.

Man kann die Sache auch also entwickeln und rechtfertigen: Wenn zu einer geometrischen Proportion das vierte Glied fehlt und gesucht werden soll, wie

$$21 : 12 = 7 : x$$

so ist $21 \times x = 12 \times 7$ (nach §. 106).

Aber x muß allein stehen, wenn es in seinem einfachen Werth erkannt werden soll. Dieß geschieht dadurch, daß man $21 \times x$ durch 21 dividirt, weil $\frac{12 \times x}{21} = x$ ist. Alsdann muß aber auch der gleiche Werth von $21 \times x$ nämlich $12 \times 7$ durch 21 dividirt werden (wegen §. 98). Dadurch erhält man

$$x = \frac{12 \times 7}{21} \text{ oder } x = 4$$

d. h. das unbekannte vierte Glied einer geometrischen Proportion bekommt man allemal, wenn man die beiden mittlern Glieder (hier 12 und 7) mit einander multiplicirt und dieses Produkt durch das erste Glied (hier durch 21) dividirt.

§. 111. Satz. Zwei Zahlen bleiben in einerlei geometrischem Verhältnisse, wenn man sie mit einerlei Zahlen multiplicirt oder dividirt.

Bew. Das Verhältniß bleibt unverändert, wenn der Exponent unverändert bleibt. Wenn nun beide Glieder durch einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so wird das eine Glied so vielmal größer oder kleiner, als das andere. Darum muß auch das erste Glied noch immer das zweite so oft in sich enthalten, als vor dem Multipliciren oder Dividiren, das heißt, der Exponent bleibt unverändert, folglich auch das Verhältniß. Oder man schreibe das Verhältniß als einen Bruch (§. 93); so weiß man (§. 33. 35), daß ein Bruch in seinem Werthe ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner mit der nämlichen Zahl multiplicirt oder dividirt. Z. B.

28 : 7 hat 4 zum Exponenten, und

3 . 28 : 3 . 7 d. i. 84 : 21 hat auch 4 zum Exponenten. Eben so

$36 : 12$ hat 3 zum Exponenten, und

$^{36}/_4 : {}^{12}/_4$ d. i. $9 : 3$ hat auch 3 zum Exponenten.

§. 112. Man kann daher in einer geometrischen Proportion die zwei Glieder eines jeden Verhältnisses mit einerlei Zahl multipliciren oder dividiren, und sie dadurch auf die kleinsten Zahlen bringen, wodurch die Rechnung oft sehr vereinfacht wird. Z. B.

$^3/_4 : {}^5/_8 = 16 : 13^1/_3$

$8 \,.\, {}^3/_4 : 8 \,.\, {}^5/_8$ d. i. $6 : 5 = 16 : 13^1/_3$

wo überall der Exponent $1^1/_5$ ist.

Eben so $12 : 48 = 9 : 36$

$^{12}/_{12} : {}^{48}/_{12}$ d. i. $1 : 4 = 9 : 36$

wo durchaus der Exponent $^1/_4$ ist.

§. 113. Wegen §. 109 kann auch das erste und dritte Glied einer geometrischen Proportion mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Z. B.

$^5/_4 : 6 = {}^7/_4 : 8^2/_5$

$4 \,.\, {}^5/_4 : 6 = 4 \,.\, {}^7/_4 : 8^2/_5$

d. i. $5 : 6 = 7 : 8^2/_5$

Eben so $35 : 8 = 20 : 4^4/_7$

$^{35}/_5 : 8 = {}^{20}/_5 : 4^4/_7$

d. i. $7 : 8 = 4 : 4^4/_7$.

§. 114. Satz. Bei mehren Proportionen verhält sich das Produkt aller ersten Glieder zu dem Produkte aller zweiten, wie das Produkt aller dritten zu dem Produkte aller vierten. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3 : 5 = 12 : 20 \\ 4 : 8 = \phantom{1}2 : \phantom{2}4 \\ 6 : 2 = 21 : \phantom{2}7 \\ \hline \end{array}$$

$3 \,.\, 4 \,.\, 6 : 5 \,.\, 8 \,.\, 2 = 12 \,.\, 2 \,.\, 21 : 20 \,.\, 4 \,.\, 7$

d. i. $72 : 80 = 504 : 560$.

Bew. Um bei den gegebenen Proportionen ste-

hen zu bleiben, weiß man (aus §. 93), daß sich dieselben auch also schreiben lassen:

$$3/5 = 12/20$$
$$4/8 = 2/4$$
$$6/2 = 21/7.$$

Vermöge §. 98 aber ist

$$3/5 \cdot 4/8 \cdot 6/2 = 12/20 \cdot 2/4 \cdot 21/7$$

oder was einerlei ist

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{5 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 21}{20 \cdot 4 \cdot 7}$$

wofür man nun schreiben kann:

$$3 \cdot 4 \cdot 6 : 5 \cdot 8 \cdot 2 = 12 \cdot 2 \cdot 21 : 20 \cdot 4 \cdot 7.$$

§. 115. Wenn Proportionen von der Art sind, daß in dem einen Verhältnisse, z. B. in dem zweiten, das Hinterglied immer dem Vorderglied des nächstfolgenden Verhältnisses gleich ist: so kann man (vermöge §. 111) diese gleichen Glieder gegenseitig ausstreichen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 12 : 15 = 4 : 5 \\ 10 : 4 = 5 : 2 \\ 16 : 24 = 2 : 3 \\ \hline 12 \cdot 10 \cdot 16 : 15 \cdot 4 \cdot 24 = 4 : 3 \end{array}$$

$$\text{d. i. } 1920 : 1440 = 4 : 3.$$

§. 116. Aufg. Eine Zahl in mehre Theile zu theilen, daß sich diese Theile wie gegebene andere Zahlen verhalten.

Aufl. Es ist einleuchtend, daß die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen sich verhalte zu jeder einzelnen Verhältnißzahl, wie sich die zu theilende Zahl (als Summe) zu jedem gesuchten Theile (als der neuen Verhältnißzahl) verhält. Darum addire man zuerst die gegebenen Verhältnißzahlen und setze ihre Summe in das erste Glied einer geometrischen Pro-

portion, jede einzelne gegebene Verhältnißzahl in das zweite, und die zu theilende Summe oder Zahl in das dritte Glied. Dieß gibt so viele verschiedene Proportionen, als Verhältnißzahlen gegeben sind; zu welchen Proportionen das vierte Glied (nach § 110) gesucht wird, und dieß gibt nach der Reihe die verlangten Theile.

Z. B. die Zahl 4500 soll in 4 Theile getheilt werden, welche sich wie die Zahlen 3, 4, 5, 6 verhalten. Es ist aber $3 + 4 + 5 + 6 = 18$; demnach

$18 : 3 = 4500 : x$; woraus $x = 750$ erster Theil
$18 : 4 = 4500 : x$; „ „ $x = 1000$ zweiter Theil
$18 : 5 = 4500 : x$; „ „ $x = 1250$ dritter Theil
$18 : 6 = 4500 : x$; „ „ $x = 1500$ vierter Theil.

Wirklich verhält sich auch nun

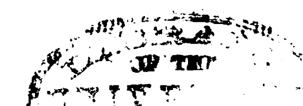
$$750 : 1000 = 3 : 4$$
$$1000 : 1250 = 4 : 5$$

u. s. w. und die Summe der gefundenen Theile ist der gegebenen Zahl gleich, nämlich

$$750 + 1000 + 1250 + 1500 = 4500.$$

Zusatz. Wenn die gegebenen Verhältnißzahlen nicht zusammenhängend sind, wie doch in der vorhergehenden Aufgabe vorausgesetzt ist, so werden sie dazu gebracht durch §. 111. Z. B die Zahl 6000 soll in 4 Theile so zerlegt werden, daß der erste Theil sich zum zweiten verhalte wie 5 zu 6; der zweite zum dritten wie 9 zu 8; der dritte zum vierten wie 14 zu 15. Die Rechnung steht dann also aus:

$$\begin{array}{llll} 5 : & 6 & & \\ & 9 : & 8 & \\ \hline 45 : & 54 : & 48 & \\ & & 14 : & 15 \\ \hline 630 : & 756 : & 672 : & 720. \end{array}$$



Diese vier Glieder können aber wieder durch 3 . 2 = 6 dividirt werden; dadurch erhält man kleinere Zahlen 105 : 126 : 112 : 120. Ihre Summe ist 463. Die Rechnung geht dann also weiter:

$463 : 105 = 6000 : x$ und $x = 1360^{320}/_{463}$

$463 : 126 = 6000 : y$ und $y = 1632^{384}/_{463}$

$463 : 112 = 6000 : z$ und $z = 1451^{187}/_{463}$

$463 : 120 = 6000 : v$ und $v = 1555^{35}/_{463}$

6000

---

## Anwendungen der bisherigen Lehren auf die verschiedenen Rechnungen des bürgerlichen Lebens.

---

### I. Regel de Tri (Dreisatz) oder einfache Proportionsrechnung.

§. 117. Die Regel de Tri d. h. die Regel von drei, nämlich Sätzen oder Gliedern, ist nichts anders als die Aufgabe: zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das vierte zu finden (§. 110). Sie findet also überall Statt da, wo bei zwei Verhältnissen das Vorderglied des einen das Hinterglied so oft enthält, wie es bei dem andern Verhältnisse sein soll, zu welchem noch das fehlende Glied gesucht wird. Die Größen in dem einen Verhältnisse können also von den Größen des andern gar wohl verschieden sein, wenn nur das eine Glied des ersten Verhältnisses so oft in dem andern Gliede enthalten ist, als das eine Glied des zweiten Verhältnisses in dem andern Gliede steckt. Dieses findet z. B. bei

Waaren und ihrem zugehörigen Preise, bei Kapitalien und den Zinsen, die sie tragen u. s. w. Statt. Denn dreimal so viel Waare kostet dreimal so viel Geld; sechsfach so große Kapitalien tragen sechsfach größere Zinsen, u. s. w. Z. B.

1 Pfd. : 3 Pfd. = 8 fl. : 24 fl.

eben so

100 fl. Kap. : 600 fl. Kap. = 5 fl. Zins. : 30 fl. Zins.

Die Glieder eines und des nämlichen Verhältnisses hingegen müssen immer von einerlei Art sein. Denn Loche sind nicht in Gulden, noch Thaler in Pfunden enthalten. Es ist also unnatürlich, anzusetzen:

1 Pfd : 8 fl. = 3 Pf. : 24 fl.

§. 118. Die Größen sind nun theils von der Art, daß mit dem Wachsthume der einen Größe auch die andere wächst oder mit der Abnahme der einen auch die andere abnimmt; theils aber sind sie von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine Größe zunimmt, die andere abnimmt, oder daß, wenn die eine abnimmt, die andere zunimmt. Von den Größen der ersten Art sagt man, daß sie im geraden Verhältnisse stehen. Zu diesen gehören 1) Waaren und ihre Preise; 2) Kapitalien und Zinsen; 3) die Menge der Arbeiter und die Menge ihrer Arbeit; 4) Zeit und Lohn der Arbeiter; 5) Die Menge der Arbeit und der Lohn dafür; 6) die Anzahl der Menschen und die Lebensmittel, welche sie in der nämlichen Zeit nöthig haben; 7) die Länge des Weges und die zum Durchlaufen desselben zu verwendende Zeit bei gleicher Geschwindigkeit u. s. w. Von den Größen der andern Art sagt man, daß sie im umgekehrten Verhältnisse stehen. Dahin gehören 1) die Menge der Arbeiter und die zu der nämlichen Arbeit erfor-

derliche Zeit; 2) die Menge der Menschen und die Zeit, in welcher sie eine bestimmte Menge Nahrungsmittel verzehren; 3) die Größe des Fußes oder eines andern Maaßes und die Anzahl derselben in einer bestimmten Länge; 4) der Preis des Getreides und das Gewicht des Brotes für das nämliche Geld; 5) die Menge der Waare, welche man für ein bestimmtes Geld kauft, und der Preis derselben; 6) die Geschwindigkeit und die Zeit bei einerlei Weg; 7) die Größe der Fracht und die Länge des Weges bei gleichgroßer Zahlung; 8) die Breite eines Zeuges und seine Länge, wenn das Zeug zu einerlei Sache verbraucht, oder wenn Zeug aus einer bestimmten Menge Garn verfertigt wird; 9) die Größe der Kapitalien und der Procente, wenn gleichviel Zinsen fallen sollen; 10) die Kapitalien und die Zeit, in welcher jene ausstehen, um gleichgroße Zinsen abzuwerfen.

§. 119. Bei einer Regel de Tri-Aufgabe sind drei Größen gegeben, unter welchen diejenige, von welcher man Etwas wissen will, die Fragezahl heißt. Diese hat unter den drei gegebenen Größen eine gleichartige oder eine solche, die wenigstens mit ihr gleichartig gemacht werden kann. Diese beiden Größen bilden das erste Verhältniß der geometrischen Proportion. Die dritte von den drei gegebenen Größen ist mit derjenigen gleichartig (oder doch gleichartig zu machen), welche gesucht werden soll. Und diese zwei Größen bilden das zweite Verhältniß der Proportion. Z. B. Was muß für 25 Pfund gezahlt werden, wenn 10 Pfund 12 fl. kosten? In den 25 Pfd. sehen wir offenbar die Fragezahl und diese bildet mit der gleichartigen Größe von 10 Pfd. das erste Verhältniß. Die noch übrige dritte Größe, näm-

lich 12 fl., bildet mit der zu suchenden Zahl von Gulden, die als unbekannt mit x bezeichnet zu werden pflegt, das zweite Verhältniß. Weil aber 25 Pfd. mehr kosten als 10 Pfd., so hat man hier steigende Verhältnisse. Demnach ist der Proportions- oder Regel de Tri-Ansatz folgender

$$10 \text{ Pfd.} : 25 \text{ Pfd.} = 12 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

und (nach §. 110) ist $x = \frac{25 \times 12}{10} = \frac{300}{10} = 30$ fl.

d. h. die 25 Pfund kosten 30 fl.

§. 120. Die Hauptsache ist nun die richtige Stellung der Glieder oder der richtige Regel de Tri-Ansatz. Wer diesen in seiner Gewalt hat (und hiezu ist nur gesunder Menschenverstand nöthig), der hat gewonnen Spiel nicht nur in der Regel de Tri, sondern auch in allen von ihr oder von dem Proportionssatz abhängigen Rechnungsarten, und bedarf nicht aller der vielen und unnützen und leicht vergeßlichen Regeln. Man braucht nur Folgendes zu beachten und einzuhalten: Vor Allem setze man diejenige Größe, welche mit der zu suchenden gleichartig ist (oder wenigstens gleichartig gemacht werden kann), in das dritte Glied, und untersuche nun, ob nach der Natur und Beschaffenheit der Sache die zu suchende vierte Zahl größer oder kleiner werden muß als die dritte. Im ersten Falle wird von den beiden übrigen gleichartigen Größen, welche das erste Verhältniß bilden, die größere in das zweite Glied, im andern Falle wird die kleinere in das zweite Glied gesetzt, und die andere noch übrige kommt in das erste Glied zu stehen. Man kann die Sache auch also vorstellig machen: Die zu suchende Größe oder Zahl bildet immer mit der ihr gleichartigen unter den

drei gegebenen Größen das zweite Verhältniß der Proportion dergestalt, daß die unbekannte Größe (x) in das vierte Glied und die ihr gleichartige in das dritte gestellt wird. Aus der Natur der Sache oder aus den Bedingungen der Aufgabe wird nun untersucht, ob das nun angesetzte zweite Verhältniß ein steigendes oder ein fallendes werden muß, und darnach müssen die beiden übrigen gleichartigen Größen, die das erste Verhältniß bilden, ebenfalls zu einem steigenden oder fallenden Verhältnisse gestellt werden. Denn nur zwei steigende oder nur zwei fallende gleiche Verhältnisse können zu einer richtigen Proportion verbunden werden. Bei diesem Verfahren und dem richtigen Einhalten der auf der Natur der Sache und der Proportion gegründeten Vorschrift fällt die Eintheilung der Regel de Tri in eine gerade und umgekehrte (oder gar verkehrte) als unnütz ganz weg, und der Weg zu einem richtigen und sichern Rechnen ist geebnet. Wir wollen die Sache durch einige Beispiele erläutern:

1) Jemand kauft sich von einem Tuche, wovon die Elle d. i. 1 Elle 5 fl. kostet, $7^1/_2$ Ellen. Was muß er dafür zahlen? Es ist einleuchtend, daß, je mehr Ellen gekauft werden, desto mehr gezahlt werden muß. Das vierte Glied wird daher größer als das dritte, demnach muß auch von den beiden Größen (1 Elle und $7^1/_2$ Ellen), welche das erste Verhältniß bilden, die größere Zahl ($7^1/_2$) in das zweite Glied zu stehen kommen. Der richtige Ansatz ist also:

$$1 \text{ Elle} : 7^1/_2 \text{ Ellen} = 5 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

und $x = \frac{7\frac{1}{2} \times 5}{1} = \frac{15}{2} \times 5 = \frac{75}{2} = 37^1/_2$ fl. d. h. für die $7^1/_2$ Ellen müssen $37^1/_2$ fl. oder 37 fl. 30 Kr. gezahlt werden.

2) Wenn 3 Personen mit einander täglich 2 Thlr. verdienen: wie viel verdienen 12 Personen bei gleicher Arbeit und gleichem Fleiße? Offenbar verdienen mehr Personen auch mehr Geld. Es bildet daher das zu suchende Glied (x Thlr.) mit dem gleichartigen Gliede (2 Thlr.) ein steigendes Verhältniß; demgemäß müssen auch die übrigen Glieder (3 und 12 Personen) in ein steigendes Verhältniß gestellt werden. Man muß also ansetzen:

3 Pers. : 12 Pers. = 2 Thlr. : x Thlr.

und $x = \frac{12 \times 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$ Thlr.

d. h. unter den angegebenen Umständen ist der tägliche Verdienst der 12 Personen gemeinschaftlich 8 Thlr.

3) Zu einer bestimmten Arbeit brauchen 18 Arbeiter 21 Tage. Wie viel Tage werden aber nur 7 Arbeiter dazu nöthig haben? Man sieht leicht, daß, je weniger Arbeiter zu der nämlichen Arbeit angestellt werden, dieselben dagegen desto mehr Zeit dazu brauchen. Die zu suchenden Tage (x) machen demnach mit den gegebenen 21 Tagen ein steigendes Verhältniß; weßhalb auch die zwei übrigen gegebenen Glieder (18 und 7 Arbeiter) ein steigendes Verhältniß bilden müssen. Der einzig wahre Ansatz ist demnach

7 Arbeiter : 18 Arbeitern = 21 Tage : x Tagen

und $x = \frac{18 \times 21}{7} = 54$ Tage

d. h. zu der nämlichen Arbeit, wozu 18 Arbeiter nur 21 Tage nöthig haben, brauchen 7 Arbeiter 54 Tage.

4) Zu einer Bekleidung sind $8^3/_5$ Ellen Unterzeug, das $^5/_4$ Ellen breit ist, erforderlich. Wie viel Unterzeug aber hat man nöthig, wenn dasselbe $^7/_4$ Ellen breit ist? Die Fragezahl ($^7/_4$ Ellen) ist größer

sich folgende Verhältnisse heraus, nämlich entweder 220 : 25 oder 2 : $^{25}/_{110}$ oder 2 : $^{5}/_{22}$. Man kann nun, wie schon aus den eben gegebenen Beispielen erhellet, verschiedenartige Grössen dadurch gleichartig machen oder auf einerlei Einheit bringen, daß man entweder die grössern Einheiten auf die kleinern oder die kleinern auf die grössern bringt. Beispiele:

1) Es sind 3 Ctl. 72 Pfd. einer gewissen Sache um 56 fl. 48 Kr. gekauft worden. Wie hoch kommt 1 Pfund? Man kann hier die Centner zu Pfunden und die Gulden zu Kreuzern machen; alsdann ist, wenn man den Centner zu 100 Pfd. annimmt, der Ansatz

372 Pfd. : 1 Pfd. = 3408 Kr. : x Kr.

und $x = \frac{1 \times 3408}{372} = 9^{5}/_{31}$ Kr.

d. h. 1 Pfund dieser Waare kostet $9^{5}/_{31}$ Kr. Man hätte aber auch, wiewohl unbequemer, die Pfunde in Centner verwandeln können. Die Rechnung sieht dann also aus:

$3^{72}/_{100}$ Ctl. : $^{1}/_{100}$ Ctl. = 3408 Kr. : x Kr.

und $x = \frac{^{1}/_{100} \times 3408}{3^{72}/_{100}} = \frac{^{3408}/_{100}}{^{372}/_{100}} = {}^{3408}/_{100} : {}^{372}/_{100}$

$= {}^{3408}/_{100} \times {}^{100}/_{372} = 9^{5}/_{31}$ Kr. wie vorhin.

2) Wenn 20 Pfd. $58^{2}/_{3}$ fl. kosten: wie hoch kommt das Loth d. i. 1 Loth? Man sieht leicht, daß blos Kreuzer herauskommen werden. Darum thut man wohl, die Gulden sogleich in Kreuzer zu verwandeln und diese in den Ansatz zu bringen. Die Pfunde aber müssen der Gleichartigkeit wegen in Lothe verwandelt werden. Uebrigens haben wir hier offenbar fallende Verhältnisse; demnach rechnen wir also:

640 Lothe : 1 Loth = 3520 Kr. : x Kr.

und $x = \frac{1 \times 3520}{640} = 5\frac{1}{2}$ Kreuzer als der Preis eines Lothes.

3) In Preußen werden 3 Loth einer gewissen Waare für 8 Silbergroschen verkauft. Wie theuer ist hienach der dortige Centner? Weil hier der Centner 110 Pfund hält und das Pfund 32 Lothe hat, folglich 1 Centner = 110 Pfd. = $110 \times 32 = 3520$ Loth ist, überdieß hier steigende Verhältnisse Statt finden: so ist der Ansatz

3 Loth : 3520 Loth = 8 Silbergr. : x Silbergr.

und $x = \frac{3520 \times 8}{3} = 9386\frac{2}{3}$ Silbergroschen = 312 Thlr. $26\frac{2}{3}$ Silbergroschen als der Preis eines Centners.

§. 122. Von den oben (§. 111 bis 113) mitgetheilten Sätzen kann oft ein vortheilhafter Gebrauch gemacht werden. Ihre Anwendung gibt zum Theil das, was in manchen Rechenbüchern unter dem Namen der wälschen Praktik vorkommt. Beispiele:

1) Man kauft $4\frac{1}{4}$ Pfd. um 3 fl 45 Kr.; wie hoch kommen $\frac{3}{4}$ Pfd?

$4\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 3$ fl. 45 Kr. : x

oder $\frac{17}{4} : \frac{3}{4} = 225$ Kr. : x; und nun nach §. 112

$17 : 3 = 225 : x$; woraus

$x = \frac{3 \cdot 225}{17} = 39\frac{12}{17}$ Kr. als der Werth von $\frac{3}{4}$ Pfd.

2) Für $12\frac{1}{2}$ Loth zahlt man $3\frac{1}{2}$ Thlr.; wie hoch kommen 20 Loth?

$12\frac{1}{2} : 20 = 3\frac{1}{2}$ Thlr. : x Thlr.

$\frac{25}{2} : 20 = \frac{7}{2} : x$

$25 : 20 = 7 : x$ nach §. 113;

ferner $5 : 4 = 7 : x$ nach §. 112 und

$x = \frac{4 \cdot 7}{5} = 5^3/_5$ Thlr. oder 5 Thlr. 18 Silbergr. der Preis von 20 Loth.

3) Man kauft 7 Pfd. um 26 Thlr.; wie viel kosten 28 Pfd.?

$7 : 28 = 26 : x$

$1 : 4 = 26 : x$ nach §. 112;

also $x = 104$ Thlr. der Werth der 28 Pfd.

4) Es werden 12 Centner mit 33 fl. bezahlt; wie hoch kommen 40 Centner?

$12 : 40 = 33 : x$

$3 : 10 = 33 : x$ nach §. 112;

ferner $1 : 10 = 11 : x$ nach §. 113

und $x = 110$ fl. der Preis von 40 Ctl.

§. 123. Durch scharfes Nachdenken über die Natur der Gegenstände, die in den Aufgaben vorkommen, kann man auch die beim ersten Blicke etwas schwierigen und verwickelten Aufgaben lösen, wenn anders die Auflösung überhaupt nur von gleichen Verhältnissen abhängt. Z. B.

1) An einen bestimmten Ort sollen 300 fl. frankirt oder frei geschickt werden. Allein am Orte der Absendung kann das Geld nicht frankirt werden. Wie viel muß nun der Summe zugelegt werden, daß der Empfänger, der nun das Porto tragen muß, doch seine 300 fl. voll erhalte, wenn man weiß, daß der Gulden bis zu jenem Orte 2 Kreuzer Porto kostet? Offenbar hat jeder Gulden für den Empfänger anstatt 60 Kr. nur 58 Kr. Werth. So vielmal also 60 mehr ist als 58; so vielmal muß daher auch mehr geschickt werden als 300 fl. Man setzt also mit Recht an

$58 : 60 = 300$ fl. : $x$ fl.

und $x = \frac{60 \times 300}{58} = 310$ fl. 20 Kr. $2^{22}/_{29}$ Pfennige d. h. man darf nur 10 fl. 20 Kr. $2^{22}/_{29}$ Pf. über 300 fl. schicken, so kann der Empfänger das Porto selbst tragen ohne allen Verlust.

2) Es sollen 10000 Thlr. portofrei irgend wohin gesandt werden. Die Post nimmt aber die Bezahlung nicht an oder nur z. B. bis an die Grenze. Wie viel muß nun auf das Geld gezahlt werden, daß der Empfänger durch das Zahlen des Porto keinen Schaden hat, wenn das Postgeld $^1/_2$ Procent ist? Dem Empfänger ist offenbar jedes Hundert nur $99^1/_2$ werth. Demnach ist der richtige Ansatz

$99^1/_2 : 100 = 10000$ Thlr. : x Thlr.

und $x = \frac{100 \times 10000}{99\frac{1}{2}} = 10050$ Thlr. 7 Sgr. 6,45 Pf. d. h. wenn man 50 Thlr. 7 Sgrl. $6^1/_2$ Pf. zulegt, so kann der Empfänger ohne Schaden das Postgeld schon bezahlen.

3) Jemand kauft ein Pferd um 60 Thlr. und verkauft es wieder um 72 Thlr. Wie viel Procent (d. h. an jedem Hundert) hat er gewonnen? Der reine Gewinn ohne Rücksicht auf Procente ist 12 Thlr. Demnach

$$60 : 100 = 12 : x$$

und $x = \frac{100 \times 12}{60} = 20$ Procent

d. h. jedes Hundert würde 20 abwerfen. Natürlich können dann 60 Thlr. des Einkaufs nicht 20, sondern nur 12 abwerfen, wie man aus dem Ansatz $100 : 60 = 20 : x$ sogleich finden wird.

4) Ein Landmann hat seinen Zehnten (d. h. den zehnten Theil seiner ganzen Ernte) schon abgegeben

und bringt noch 6 Schock und 27 Garben in seine Scheune. Wie viel hat er in Allem geerntet? Es leuchtet ein, daß, so vielmal 10 mehr ist als 9, eben so vielmal mehr hat er geerntet als 387 Garben. Demnach setzen wir richtig an

$$9 : 10 = 387 \text{ Garben} : x \text{ Garben}$$

und $x = \frac{10 \times 387}{9} = 430$ Garben

d. h. die ganze Ernte betrug 430 Garben = 7 Schock 10 Garben; und darum muß dieser Landmann 430 — 387 = 43 oder $^{430}/_{10}$ = 43 Garben Zehnten gegeben haben.

5) Es sollen 240 Soldaten in 30 Tagen einen Wall aufbauen. Da aber die Arbeit früher geendigt sein soll, so werden ihnen, nachdem sie schon 10 Tage gearbeitet hatten, noch 60 Mann beigegeben. Allein als diese mit einander 11 Tage gearbeitet hatten, werden 50 Mann zu einem andern Dienste wieder abberufen. Wann werden nun die zurückbleibenden den Wall vollends zu Ende bringen? und wie lange wird der ganze Bau gedauert haben? — Als die 240 Mann noch 20 Tage zu arbeiten hatten, kommen 60 Mann noch hinzu; diese 300 Mann werden aber in weniger als 20 Tagen fertig werden, und zwar in 16 Tagen, nämlich

$$300 : 240 = 20 \text{ Tage} : x \text{ Tagen}$$

und $x = \frac{240 \times 20}{300} = 16$ Tagen.

Nach 11 Tagen hätten diese 300 Mann noch 16 — 11 = 5 Tage zu arbeiten gehabt. Da aber 50 Mann abberufen werden, so werden diese 250 Mann mehr als 5 Tage brauchen, und es ist

$$250 : 300 = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tagen}.$$

und $x = \frac{300 \times 5}{250} = 6$ Tagen.

Die Dauer des ganzen Baues ist demnach 10 + 11 + 6 = 27 Tage.

§. 124. An folgenden Aufgaben mag nun der Zögling allein seine Kraft üben:

I.

1) Ein Quint Safran kostet 17 Kr. 2 Pf.; wie hoch kommen 1 Pfd. 8 Loth und 1 Quint?

2) Für $^2/_3$ fl. erhalte ich $^3/_4$ Pfd.; wie viel bekomme ich für $^3/_5$ fl.?

3) Wenn die Leinwand $1^1/_2$ Ellen breit wird, bekommt eine Frau von ihrem Garn $30^3/_4$ Ellen; wie viel Ellen wird sie erhalten, wenn die Leinwand nur $^5/_4$ breit werden soll?

4) Ein Getreidefeld könnte von 4 Schnittern in 10 Tagen abgeschnitten werden. Es soll jedoch in kürzerer Zeit geschehen. Der Besitzer gibt daher noch 2 Schnitter dazu; in wie viel Tagen wird nun das Getreide abgeschnitten werden?

5) Was kostet der preuß. Centner, wenn 1 Loth mit $1^1/_2$ Silbergroschen bezahlt wird?

6) In Hamburg kosten $913^3/_4$ Pfd. einer Waare 795 Mark 15 Schillinge und $4^{11}/_{16}$ Pfennige; was kosten hienach 12 Pfd. dieser Waare?

7) 1 Pfund Gewürz kostet 42 fl. 40 Kr.; was kostet 1 Quint?

8) Ein Handwerksmann kauft sich in sein Haushalten 1 Paar Schweine um $20^1/_2$ fl. Futter und Mastung kosten ihm 18 fl. 15 Kr. Die Ausgaben beim Schlachten betragen 1 fl. 36 Kr. Die Schweine wägen $275^1/_2$ Pfund. Wie hoch kommt ihm das Pfund zu stehen?

9) Ein Geschenk hat unter 25 Arme vertheilt werden sollen, so daß Jeder 5 fl. $18^1/_2$ Kr. erhalten,

haben würde; nun aber sollen noch 8 Arme weiter daran Theil haben; wie viel wird jetzt auf eine Person kommen?

10) Ein Fuhrmann verspricht um einen gewissen Lohn 18 Ctl. Waare 6 Meilen Wegs zu führen; wie weit müßte er um gleichen Lohn 48 Ctl. führen?

11) Eine Elle Tuch kostet im Auslande $5^1/_2$ fl.; was muß sie im Inlande kosten, wo die Elle größer ist, indem 100 inländische Ellen 107 ausländische machen?

12) 125 Ellen kosten 75 Thlr. 12 Gr. 6 Pf. Was kostet 1 Elle?

13) 6 Ctl. $42^1/_8$ Pfd. kosten 254 fl. 23 Kr. $2^1/_8$ Pf. Wie hoch kommt ein Loth?

14) $7^1/_5$ Pfund kosten $27^1/_2$ fl. Was kosten $2^5/_8$ Pfund?

15) Ein Reisender legt in $3^1/_2$ Tagen $14^2/_3$ Meilen zurück; welchen Weg wird er in einer Woche machen?

16) Bei einem Tischler ist eine Arbeit bestellt worden, die in 8 Tagen fertig sein soll; da seine 4 Gesellen aber wenigstens 14 Tage dazu nöthig haben würden, so wird gefragt: wie viele Gesellen der Meister noch annehmen muß, um das Bestellte in der bestimmten Zeit zu liefern?

17) Wenn für 1150 Soldaten Mundvorrath in einer Festung auf 9 Monate vorhanden ist: wie lange können 850 Soldaten davon erhalten werden?

18) In einer belagerten Festung liegen 8000 Mann Besatzung mit einem Vorrath an Lebensmitteln auf 16 Monate. Nach 4 Monaten entkommen 1800 Mann aus der Festung. Wie lange sind die übrigen noch mit Lebensmitteln versehen?

19) $4^1/_2$ Ctl. betragen 46 Thlr. 11 Gr. $7^1/_2$ Pf. Was kosten $7^1/_5$ Ctl.?

20) Die bayerische Elle enthält 369,27 pariser Linien; die preußische aber 295,6 par. Linien. Wie viel Ellen in Preußen betragen demnach 100 bayerische Ellen?

21) Für 8 Thlr. 15 Gr. $4^{8}/_{25}$ Pf. erhält man $^{4}/_{5}$ Ctl. Wie viel bekommt man für $6^{3}/_{4}$ Thlr.?

22) Wie viele sächsische und preußische Scheffel Fruchtmaaß gehen auf einen bayerischen Scheffel, da der sächsische Scheffel 5416 pariser Kubikzoll, der preußische Scheffel 2770,7 pariser Kubikzoll und der bayerische Scheffel 11209,6 par. Kubikzoll enthält?

23) Man hat 369 Pfd. 31 Loth $3^{5}/_{6}$ Quint mit 1182 fl. 48 Kr. $1^{5}/_{8}$ Pf. bezahlt. Wie hoch kommen hienach 2219 Pfd. 31 Lth. 3 Qt.?

24) Wenn der Metzen Haber 48 Kr. und der Centner Heu 1 fl. 30 kr. kostet: wie viel kosten 2 Pferde jährlich zu unterhalten, wenn jedes Pferd täglich $^{1}/_{8}$ Metzen Haber und 8 Pfund Heu erhält?

25) Eine Gemeinde von 36 Familien erhält 25 Mann zur Einquartirung auf einen Monat, zu 30 Tagen gerechnet. Sie übergibt die Verpflegung der ganzen Mannschaft dem Wirthe, welcher am Ende für die ganze Verpflegung 328 fl. $7^{1}/_{2}$ Kr. verlangt. Man will wissen: 1) wie viel jeden Familienvater am Beitrage trifft; 2) wie viel für jeden Mann auf die ganze Verpflegungszeit gerechnet ist, und 3) wie viel für jeden Mann täglich gerechnet worden ist?

## II.

26) Von einer Waare in Hamburg kosten $3^{3}/_{4}$ Pfd. $6^{1}/_{4}$ Mark. Wie hoch kommen $9^{1}/_{2}$ Pfd.?

27) Von einer gewissen Anzahl Garn erhält man 78 Ellen $1^{1}/_{4}$ Elle breite Leinewand; wie viel Ellen

wird man von dem nämlichen Garn erhalten, wenn sie $1\frac{1}{2}$ Elle breit werden soll?

28) Wenn in 3 Tagen irgend ein Belagerungswerk durch 150 Mann zu Stande gebracht werden kann: wie viel Mann sind erforderlich, wenn dasselbe in 2 Tagen fertig werden soll?

29) In Hannover kauft Jemand 1 Ctl. irgend einer Waare für 60 Thlr. Wie hoch kommt das Pfd., da der Thlr. 36 Mariengroschen und der Mariengroschen 8 Pfennige hält?

30) In Lübeck sind 112 Ellen um $24\frac{3}{4}$ Mark gekauft worden: wie hoch kommen 30 Ellen?

31) Wenn $42\frac{1}{2}$ Pfd. zu 158 fl. 40 Kr. angeschlagen werden: welches ist der Preis von $205\frac{5}{8}$ Pfd.?

32) Aus einem gewissen Stamme lassen sich 14 Blöcke schneiden, von welchen jeder 5 Fuß 3 Zoll lang ist. Wie viel Blöcke wird man aus dem nämlichen Stamme bekommen, wenn jeder nur 3 Fuß 6 Zoll lang sein soll, den Fuß zu 12 Zoll gerechnet?

33) An einen gewissen Ort sind 100 Klaftern Holz von $3\frac{3}{4}$ Fuß Scheitlänge zu liefern. Da aber gegenwärtig kein anderes Holz als von $3\frac{1}{2}$ Fuß Scheitlänge vorhanden ist, so wird gefragt: wie viel Klaftern von diesem letztern geliefert werden müssen?

34) Wie hoch ist der Ctl. gerechnet, wenn für 2 Loth 3 Silbergroschen verlangt werden?

35) Was kosten 2 Schock und 18 Bündel Reißig zu Baireuth in Gulden und Kreuzern, wenn das Schock für 1 preuß. Thaler und 2 gute Groschen ausgehandelt ist, den preuß. Thaler zu 1 fl. 45 Kr. und den guten Groschen zu 3 Kr. 3 Pfennigen gerechnet? (Ein wirklicher Fall.)

36) Ein bayerischer Scheffel Roggen, aus mehreren Versuchen das Mittel genommen, gibt, nach Abzug der Verstaubung beim Mahlen, der Kleie und der Metze des Müllers zu $^1/_{16}$ vom Scheffel, 245 bayerische Pfund Mehl, aus welchen der Bäcker 350 Pfd. wohl ausgebackenes Brot liefern kann. Wenn nun dem Bäcker mit Einrechnung aller Unkosten für Holz, Salz, Trinkgeld u. s. w., ferner mit Einrechnung des Mannslohnes, so wie nach Abzug der ihm zu Gute kommenden Kleie, der Scheffel Roggen auf 12 fl. 24 Kr. zu stehen kommt: wie schwer muß ein sogenannter 12 Kreuzerlaib wiegen? — Wenn aber nach anderen Erfahrungen aus dem nämlichen Scheffel nur 316 Pfd. Brot gebacken werden können: wie viel muß dann unter übrigens gleichen Umständen das 12 Kreuzerbrot wiegen?

37) Als der preuß. Scheffel Roggen $2^1/_2$ Thlr. kostete, wog ein 2 Groschenbrot 2 Pfd. 20 Loth. Wie viel muß es wiegen, wenn der Preis desselben 2 Thlr. ist?

38) Von einer Waare kosten $^7/_8$ Ellen $^7/_9$ Thlr. Wie hoch kommen $^3/_4$ Ellen?

39) Wenn ein Dukaten mit 2 Thlr. $20^3/_4$ Gr. bezahlt wird: was machen 1000 Dukaten?

40) Jemand hat sich für seine 36 Stück Vieh auf 6 Monate mit Futter versehen. Allein nach 2 Monaten verkauft er 6 Stück davon, und $^2/_3$ Monate später noch 10 Stück. Nachdem er nun die übrigen Stücke 1 Monat gefüttert hat, kauft er sich wieder 6 Stück Vieh dazu. Wie lange wird er für den jetzigen Viehstand noch Futter haben?

41) Der Preis eines Lothes von einer gewissen

Waare ist 2 Kr. 1 Pf. Was kosten nach diesem Preise 12 Pfd. $4^3/_4$ Loth?

42) Es haben 150 Personen eine Summe Geldes in 48 Tagen verzehrt. In wie viel Zeit werden 120 Personen eben diese Summe bei gleicher Zehrung verbrauchen?

43) Was kosten 5 Mark 7 Unzen, wenn für die Mark (zu 8 Unzen gerechnet) 23 fl. 19 Kr. 2 Pf. bezahlt werden?

44) Ein Stück Feld, das 60 Ruthen lang und 40 Ruthen breit ist, soll gegen ein anderes, das nur 32 Ruthen breit ist, vertauscht werden. Wie lang muß dieses werden, wenn der Inhalt von beiden Feldern gleich bleiben soll?

45) Was kostet eine Sache, die 35 Ruthen 4 Schuh 8 Zoll lang ist, wenn die Ruthe (zu 12 Schuh und der Schuh zu 12 Zoll gerechnet) mit 1 Thlr. $12^1/_2$ Gr. bezahlt werden soll?

46) Jemand kauft Etwas um 80 Thlr. und verkauft es wieder um 96 Thlr. Wie viel Procent (d. i. an jedem Hundert) hat er gewonnen?

47) Eine gewisse Entfernung wurde nach rheinländischen Fußen, von welchen jeder 139,13 pariser Linien lang ist, gemessen und 125 Fuß lang gefunden. Wie lang wird dieselbe Entfernung nach bayerischen Fußen sein, von welchen jeder 129,38 pariser Linien hält?

48) Wenn 1 Bogen zu 12 Patronen erforderlich ist: wie viel Papier hat man zu 100000 Patronen nöthig? wie viel kostet dieses, wenn das Buch mit 1 Gr. 3 Pf. bezahlt wird? und wie viel Pulver ist zu jenen 100000 Patronen nöthig, wenn jede Patrone mit 2 Loth Pulver gefüllt wird?

49) Einer Haushälterin wurden 25 fl. zum Einkauf verschiedener Lebensmittel übergeben; davon kaufte sie $13\frac{1}{2}$ Pfd. Schmalz, das Pfd. zu $19\frac{1}{2}$ Kr.; $3\frac{1}{2}$ Hundert Aepfel, zu 40 Kr.; $9\frac{3}{4}$ Pfd. Kalbfleisch zu 7 Kr.; $3\frac{1}{4}$ Pfd. Rindfleisch zu $7\frac{1}{2}$ Kr.; 7 junge Hühner, zu $14\frac{1}{2}$ Kr.; $3\frac{1}{4}$ Pfd. Kaffee, zu $52\frac{1}{2}$ Kr.; $1\frac{1}{2}$ Loth Safran, zu 50 Kr.; 2 Metzen Salz, zu $1\frac{2}{3}$ fl.; 3 Schinken, welche wogen $19\frac{1}{2}$ Pfd., das Pfd. zu $12\frac{1}{2}$ Kr.; 1 Pfd. $2\frac{1}{2}$ Vierling Butter, das Pfd. zu 18 Kr.; 3 Pfd. $2\frac{1}{2}$ Vierling Zucker, das Pfd. zu 48 Kr. Wie viel hatte nun die Haushälterin ausgegeben?

50) Wenn die köllnische Mark fein Silber in Rußland zu 13 Silberrubeln, in Spanien zu $193\frac{1}{2}$ Realen de Vellon, in London zu $42\frac{1}{2}$ Schilling, in Hamburg zu 34 Mark, in Preußen und Sachsen zu 14 Thalern, in Wien zu 20 Gulden, und in Teutschland zu $24\frac{1}{2}$ Gulden ausgeprägt wird: was ist demnach ein Silberrubel, 1 Real de Vellon, 1 englischer Schilling, 1 hamburger Mark und 1 hamburger Schilling, von denen 16 auf eine Mark gehen, 1 preußischer Thaler, 1 sächsischer Thaler, und endlich 1 wiener Gulden in Bayern werth?

Anmerk. Eben so kann man fragen, was in Preußen oder in Sachsen oder in Hamburg u. s. w. jede andere ausländische Münze werth ist. Der Ansatz für obige erste Frage ist

$$13 \text{ Rubel} : 1 \text{ Rubel} = 24\tfrac{1}{2} \text{ fl.} : x \text{ fl.}$$

Auf ähnliche Weise wird der Ansatz für alle solche Fragen gemacht.

## III.

51) Von einer Waare kostet 1 Pfund 1 fl. 36 Kr. Was kosten 3 Ctl. 42 Pfd. dieser Waare?

52) Jemand hat 88 Pfund 16 Loth Tabak um

25 Thlr. 12 Sgr. gekauft, und davon einem Andern 5 Pfund 8 Loth überlassen. Wie viel muß dieser dafür zahlen?

53) Wenn 4 Arbeiter täglich ein Feld von $1\frac{3}{4}$ Tagwerk bearbeiten: wie viel Arbeiter werden nöthig sein, um täglich ein gleiches Feld von $2\frac{5}{8}$ Tagwerk zu bearbeiten?

54) Eine gewisse Arbeit kann von 15 Arbeitern in 8 Tagen vollendet werden. Wenn aber 3 Arbeiter abgehen: in wie viel Tagen wird sie dann zu Stande kommen?

55) Mit einem gewissen Vorrath an Lebensmitteln können 5 Personen 1 Jahr lang ausreichen. Wenn aber noch 2 Personen hinzukommen: wie lange wird dann jener Vorrath reichen?

56) Man hat $15\frac{3}{4}$ Pfund einer Waare um $12\frac{5}{6}$ Gulden gekauft, und davon $\frac{1}{2}$ Pfund an einen Andern abgetreten. Wie viel muß dieser dafür zahlen?

57) Für $75\frac{1}{2}$ Elle sind $12\frac{7}{8}$ fl. gezahlt worden. Wie hoch kommen davon $1\frac{3}{4}$ Ellen?

58) Eine Wand ist mit 120 Ellen Leinwand überzogen, welche $1\frac{1}{2}$ Elle breit ist. Diese Wand soll mit Tapeten bekleidet werden, welche $\frac{5}{4}$ Ellen breit sind. Wie viel Ellen Tapeten werden erforderlich sein?

59) Eine gewisse Arbeit kann in 36 Tagen fertig werden, wenn 18 Personen daran arbeiten. Wie viel Personen braucht man aber, wenn sie in 24 Tagen vollendet sein soll?

60) Was kosten 4 Schock und 38 Bündel Reißig, wenn das Schock um 1 preußischen Thaler und 2 gute fränkische Groschen (diesen zu 3 Kreuzern 3 Pfennigen gerechnet) abgegeben wird?

61) Eine alte Schuld von $57\frac{1}{2}$ Laubthalern soll

jezt in Vereinsgulden heimgezahlt werden. Wie viel macht dieß?

62) Ein Vater, dessen Schritt 2 Fuß beträgt, machte auf einem Spaziergange mit seinem Sohne, dessen Schritt $1^1/_4$ Fuß lang ist, 6835 Schritte. Wie viel Schritte mußte der Kleine gemacht haben?

63) Wenn $^5/_6$ Ellen $1^1/_4$ Thlr. kosten: wie hoch kommt $^1/_2$ Elle?

64) Wie viel kosten 3 Ctl. 24 Pfd. einer Waare, wenn der Ctl. zu 18 fl. 40 Kr. zu stehen kommt?

65) Es werden $5^1/_4$ Ctl. einer Waare verkauft, und an jedem Centner $2^2/_3$ fl. verloren. Wie groß ist hier der ganze Verlust?

66) Wie viel Ellen eines Zeuges erhält man für $10^5/_6$ fl., wenn man für $26^1/_8$ fl. von dem nämlichen Zeuge $9^1/_2$ Ellen bekommt?

67) Eine Wand ist mit $54^1/_8$ Ellen Leinwand überzogen, welche $1^7/_8$ Ellen breit ist. Diese Wand soll mit Tapeten bekleidet werden, welche $1^2/_3$ Ellen breit ist. Wie viel Ellen Tapeten werden erforderlich sein?

68) Ein Brandversicherungsverein besizt ein Versicherungskapital von 30875200 fl. In einem gewissen Jahre mußte für Brandversicherung eine Summe von 85377 fl. 50 Kr. vergütet werden. Wie viel trifft dieß auf jedes Hundert von obigem Versicherungskapital?

69) Jemand will eine Reise machen, welche er, wenn er täglich 4,7 Meilen zurücklegt, in 6,03 Monaten vollenden wird. Wie viel Zeit wird er dazu brauchen, wenn er täglich 5,4 Meilen machte?

70) Es wurden 4,875 Ctl. einer Waare um 390 fl. verkauft. Wie hoch kam der Centner?

§. 125. Nun muß man auch begreifen, daß die **Zinsrechnung** keine besondere Rechnungsart ist, sondern zur Proportionsrechnung gehört, weil die Zinsen nach dem Verhältnisse der Kapitalien steigen und fallen. **Zins** ist nämlich die Vergütung für die Hingabe einer zu benützenden werthvollen Sache, z. B. eines Geldwerthes, Kapitals, eines Feldes, einer Wiese, Wohnung. Dabei ist nur zu bemerken, daß zuweilen ein Glied in der Angabe zu fehlen scheint, aber in dem Ausdrucke „Procent" versteckt liegt. Denn z. B. 5 Procent bedeutet: jedes Hundert wirft 5 ab. Wir wollen die vorkommenden Fälle in einzelnen Beispielen darstellen.

1) Was betragen 2324 Thlr. 12 Gr. zu 4 Procent an Zinsen in einem Jahr? — Da 4 Procent bedeutet: 100 werfen 4 jährlich ab, so ist der Ansatz

100 Thlr. Kap. : $2324\frac{1}{2}$ Thlr. Kap. = 4 Thlr. Zinsen : x Thlr. Zinsen

und $x = \frac{2324\frac{1}{2} \times 4}{100} = 92\frac{98}{100}$ Thlr. = 92 Thlr. 23 Gr. $6\frac{6}{25}$ Pf.

2) Wie groß muß das Kapital sein, welches bei 5 Procent jährlich 400 fl. abwerfen soll? — Hier ist

$$5 : 400 = 100 : x$$

und $x = \frac{400 \times 100}{5} = 8000$ fl.

3) Von 7800 Mark Kapital wurden 234 Mark Zinsen eingenommen: wie groß ist der Zinsfuß d. h. wie hoch oder zu wie viel Procent ist dieß Kapital angelegt? — Es ist

$$7800 : 100 = 234 : x$$

und $x = \frac{100 \times 234}{7800} = 3$ Procent d. h. obiges Kapital ist nur zu 3 Procent ausgeliehen.

4) Wie viel betragen 3000 fl. zu $4^1/_2$ Procent an Kapital und Zinsen zusammen in einem Jahre? — Man darf nur, wie bisher, die Zinsen berechnen, und sie zum Kapital addiren; die Summe giebt die verlangte Antwort. Allein man kann auch die Sache mit einem eigenen Ansatz abmachen, nämlich offenbar mit folgendem:

$$100 : 3000 = 104^1/_2 : x$$

und $x = \frac{3000 \times 104\frac{1}{2}}{100} = 3135$ fl.

5) Ein zu 4 Procent angelegtes Kapital wird nach einem Jahre mit den Zinsen zurückbezahlt und im Ganzen 5200 Thlr. bezahlt. Wie groß ist das reine Kapital? — Der richtige Ansatz ist offenbar

$$104 : 5200 = 100 : x$$

und $x = \frac{5200 \times 100}{104} = 5000$ Thlr. reines Kapital.

6) Ein Kapital von 2400 Thlr. wird nach einem Jahre wieder zurückgezahlt. Für das Kapital und die fallenden Zinsen wird die Summe von 2484 Thlr. gezahlt. Wie groß ist der Zinsfuß oder zu wie viel Procent stand es aus? — Die fallenden Zinsen sind offenbar 2484 — 2400 = 84 Thlr. Darum ist der Ansatz

$$2400 : 100 = 84 : x$$

und $x = \frac{100 \times 84}{2400} = 3^1/_2$ Procent.

7) Zwei Kapitalien, das eine von 750 Thlr. und das andere zu 1000 Thlr., sind zu gleichen Procenten ausgeliehen. Wenn nun das erste 30 Thlr. Zinsen getragen hat: wie viel muß das andere an Zinsen tragen? — Hier ist

$$750 : 1000 = 30 : x$$

und $x = \frac{1000 \times 30}{750} = 40$ Thlr. Zinsen.

8) Wie viel Jahre müssen 900 fl. ausstehen, um so viele Zinsen zu tragen, als 600 fl. in 5 Jahren eingebracht haben? — Hier ist

$$900 : 600 = 5 \text{ Jahre} : x \text{ Jahren}$$

und $x = \frac{600 \times 5}{900} = 3^1/_3$ Jahre.

9) Zu wie viel Procent müssen 1200 Thlr. ausgeliehen werden, damit sie eben so viele Zinsen tragen, als 1350 Thlr. zu 4 Procent? — Der richtige Ansatz ist

$$1200 : 1350 = 4 \text{ Procent} : x$$

und $x = \frac{1350 \times 4}{1200} = 4^1/_2$ Procent.

10) Von einem gewissen Kapital, das zu 5 Procent ausgeliehen ist, hat man jährlich eine bestimmte Summe von Zinsen zu beziehen. Da aber der Zinsfuß auf 4 Procent herabgesetzt wurde, so wird gefragt: wie lange es nun dauern wird, bis die nämliche Summe an Zinsen eingehen wird? — Hier ist

$$4 : 5 = 1 \text{ Jahr} : x \text{ Jahren}$$

und $x = \frac{5 \times 1}{4} = 1^1/_4$ Jahr = 1 Jahr 3 Monate.

11) Wie groß muß ein Kapital sein, um davon zu 6 Procent in gleicher Zeit so viel Zinsen einzunehmen, als man von 3000 Mark Kapital zu $4^1/_2$ Procent erhält? — Es ist

$$6 : 4^1/_2 = 3000 : x$$

und $x = \frac{4\frac{1}{2} \times 3000}{6} = 2250$ Mark.

12) Ein Kapital von 6800 Thalern wirft jährlich eine gewisse Summe an Zinsen ab. Wenn man

nun eben diese Summe alle 8 Monate beziehen will: welch' Kapital gehört dazu? — Hier ist

8 Monate : 12 Monaten = 6800 Thlr. : x Thlr.

und $x = \frac{12 \times 6800}{8} = 10200$ Thl.

§. 126. Zur eigenen Uebung mögen noch folgende Beispiele dienen:

1) Es sind 1780 Thaler 15 Silbergroschen zu 4 Procent ausgeliehen. Wie groß sind die jährlichen Zinsen davon?

2) Wie groß muß das Kapital sein, welches bei $3^1/_2$ Procent jährlich 500 Mark Zinsen tragen soll?

3) Ein Kapital von 2547 fl. 30 Kr. hat in einem Jahr 127 fl. 22 Kr. 2 Pfennig Zinsen eingetragen. Wie groß ist der Zinsfuß?

4) Von 100 Thalern, welche zu 4 Procent ausstehen, sind 2 Thlr. 14 Gr. 8 Pfennige Zinsen abbezahlt worden: für wie viel Zeit reicht diese Zinszahlung?

5) Von einer Wiese bezieht Jemand jährlich 60 Thlr. Pachtgeld. Zu wie viel Kapital benutzt sich dieselbe, wenn dieses Pachtgeld als Zinsen zu 5 Procent gerechnet wird?

6) Von einem gewissen Kapital hat man in $1^1/_2$ Jahren 420 fl. Zinsen eingenommen. Wie groß werden von dem nämlichen Kapital die Zinsen in $3^1/_4$ Jahren sein?

7) Ein Kapital von 6800 fl. ist zu 4 Procent ausgeliehen worden. Wie viel hat man am Ende des Jahres zusammen an Kapital und Zinsen?

8) Ein Kapital nebst Zinsen wurde am Ende des Jahres mit 2310 Thlr. zurückgezahlt und es stand zu $4^1/_2$ Procent aus. Wie groß ist das reine Kapital?

9) Wie groß muß ein Kapital sein, um davon zu 4 Procent in gleicher Zeit so viel Zinsen einzunehmen, als man von 5000 Thlr. zu 5 Procent erhält?

10) Wie groß muß das Kapital sein, welches bei gleichen Procenten in $1^1/_4$ Jahren so viel Zinsen abwirft, als ein anderes Kapital von 4000 fl. in 1 Jahre?

11) Zu wie viel Procent müssen 6875 Mark ausgeliehen werden, damit sie eben so viele Zinsen abwerfen, als 5000 Mark zu $5^1/_2$ Procent?

12) Ein Kapital war bisher nur zu $3^1/_2$ Procent ausgeliehen, und nun wird es zu 5 Procent angelegt. In welcher Zeit bringt es jetzt die nämlichen Zinsen, welche es bisher in 1 Jahre trug?

§. 127. Man hüte sich, Gegenstände nach der Proportionsrechnung behandeln zu wollen, die entweder gar nicht oder wenigstens nicht in gleichem geometrischen Verhältniß zu einander stehen. Wenn man z. B. eine Meile Weges mit 2 Pferden in 1 Stunde zurücklegen kann, so kann man darum denselben Weg mit 8 Pferden nicht in $^1/_4$ Stunde machen. Aus einem ganz mit Wasser angefüllten Gefäße, das unten mit einem kleinen Loch versehen ist, fließt das Wasser anfangs schneller als später. Körper, welche frei fallen, erhalten in den folgenden Zeiten eine immer größere Geschwindigkeit.

## II. Regel de Quinque, de Septem u. s. w oder zusammengesetzte Proportionsrechnung.

§. 128. Wenn eine Größe von den Werthen mehrer Größen abhängt, jedoch so, daß ein gleiches

geometrisches Verhältniß unter ihnen Statt findet: so wird jene Größe durch diejenige Rechnungsart gefunden, welche unter dem Namen der zusammengesetzten Regel de Tri oder Regel de Quinque, de Septem, de Novem u. s. w. bekannt ist. Diese Benennung kommt daher, daß die unbekannte Zahl oder Größe aus 5 oder 7 oder 9 u. s. w. bekannten und gegebenen Zahlen gesucht wird. Das Verfahren dabei ist folgendes: Diejenige Größe, welche mit der zu suchenden gleichartig ist, kommt in das dritte Glied zu stehen, und in das erste und zweite Glied werden unter einander die übrigen gegebenen Verhältnisse nach den nämlichen Grundsätzen gebracht, welche bei der Regel de Tri entwickelt und aufgestellt worden sind. Beispiele:

1) Es haben 60 Maurer 36 Ruthen an einer Mauer in 24 Stunden gemacht. Wie viel Ruthen werden 90 Maurer in 72 Stunden bei gleichem Fleiße zu Stande bringen? — Je mehr Arbeiter, desto mehr Arbeit; und je mehr Zeit, desto mehr Arbeit; demnach ist der richtige Ansatz:

$$\left.\begin{matrix} 60 : 90 \\ 24 : 72 \end{matrix}\right\} = 36 \text{ Ruthen} : x \text{ Ruthen}.$$

Nach §. 114. erhält man, indem man die ersten Glieder, und eben so die zweiten Glieder mit einander multiplicirt, folgenden Ansatz:

$$60 \times 24 : 90 \times 72 = 36 : x$$

oder $1440 : 6480 = 36 : x$

und $x = \frac{6480 \times 36}{1440} = 162$ Ruthen.

Aber nach §. 111 — 113. kann man hier bedeutende Abkürzungen machen, so daß der einfache Satz übrig bleibt

§. 129. Folgende Beispiele mögen zur eigenen Uebung dienen:

I.

1) An einem Walle haben 200 Soldaten gearbeitet und in 8 Tagen 1200 Ruthen daran verfertigt. Wie viel Ruthen werden 350 Soldaten an eben diesem Walle in 24 Tagen fertig bringen?

2) Wenn 20 Arbeiter in 10 Tagen 190 Klafter Holz schlagen können: wie viel Zeit wird erfordert, wenn 80 Arbeiter 275 Klafter schlagen sollen?

3) Wenn der berliner Scheffel Roggen 20 Gr. gilt, so wiegt ein 2 Gr. Brot 6 Pfund. Wie viel muß ein 3 Gr. Brot wiegen, wenn der Scheffel 1 Thlr. 8 Gr. gilt?

4) Ein Fuhrmann erhält für 16 Ctl. auf 28 Meilen 40 Thlr.; wie viel wird er für 25 Ctl. auf 35 Meilen bekommen?

5) In 2 Tagen pflügen 2 Arbeiter 13 Morgen Land, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel Arbeiter gehören dazu, wenn sie in 7 Tagen 200 Morgen pflügen und täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

6) In wie viel Wochen werden 24 Arbeiter, die täglich 12 Stunden an der Arbeit sind, einen Damm von 400 Fuß Länge, 5 Fuß Höhe und 6 Fuß Breite fertig bringen, wenn 20 Arbeiter bei täglich 8 stündiger Arbeit in 4 Wochen einen Damm von 300 Fuß Länge, 6 Fuß Höhe und 8 Fuß Breite fertig machen?

7) Wenn der Metzen Roggen mit dem Umgelde 1 fl. 45 Kr. kostet, so wieget ein 6 Kreuzerbrot 2 Pfd. 6 Loth; wie viel muß ein 9 Kreuzerbrot wiegen, wenn der Metzen Roggen mit 2 fl. bezahlt wird?

8) Von 15 Arbeitern sind in 5 Wochen 200 Klaf-

tern Holz geschlagen worden, indem sie wöchentlich 4 Tage und täglich 8 Stunden gearbeitet haben. Nun will man zur Abschlagung eines andern Holzes 32 Arbeiter auf 7 Wochen annehmen, die wöchentlich 6 Tage und täglich 2 Stunden mehr als die ersten arbeiten sollen. Wie viele Klaftern werden sie in dieser Zeit fällen?

9) Es haben 14 Arbeiter in 4 Wochen bei einer täglichen Arbeit von 8 Stunden einen Graben 120 Fuß lang, 6 Fuß breit und $3^1/_2$ Fuß tief gegraben. Nun soll ein anderer Graben gezogen werden, 315 Fuß lang, 9 Fuß breit und $4^1/_2$ Fuß tief, der in 12 Wochen fertig sein soll. Wie viele Arbeiter sind bei täglicher Arbeit von 9 Stunden hiezu erforderlich?

10) Von 750 fl. Kapital sind in $5^1/_2$ Monaten 15 fl. 28 Kr. $^1/_2$ Pf. Zinsen eingegangen. Es ist die Frage: zu wie viel Procent auf das Jahr obiges Kapital ausgeliehen war?

11) Eine Festung ist auf 15 Monate mit Lebensmitteln für 3000 Mann versehen, wenn jedem Mann täglich 3 Pfd. gereicht werden. Nach 7 Monaten erhält sie 400 Mann Verstärkung und den Befehl, mit den noch übrigen Lebensmitteln 10 Monate auszureichen. Wie viel darf jetzt jedem Mann täglich gereicht werden?

12) Eine Mauer, welche 1 Fuß dick, 4 Fuß hoch und 30 Fuß lang ist, können 6 Maurer bei 12 Stunden täglicher Arbeit in 5 Tagen fertig machen, wenn sie täglich 620 Ziegelsteine setzen. Nun ist die Frage: in wie viel Tagen wird eine andere Mauer fertig werden, welche 2 Fuß dick, 6 Fuß hoch und 60 Fuß lang werden soll, wozu 12 Maurer genom-

men werden, die täglich nur 10 Stunden arbeiten und täglich 1000 Ziegelsteine setzen?

13) An einem Bau haben 10 Maurer 8 Wochen (zu 6 Arbeitstagen gerechnet) und 4 Tage, 7 Zimmerleute 5 Wochen und 2 Tage, und 3 Handlanger 6 Wochen und 1 Tag gearbeitet. Nun bekommt jeder Maurer täglich 24 Kr., jeder Zimmermann täglich $26^1/_4$ Kr. und jeder Handlanger täglich $17^1/_2$ Kr. Was hat der Bauherr im Ganzen zu zahlen?

14) Wenn ein Schuhmacher sich in einer Woche 1 fl. 45 Kr. und 1 Kleidermacher 48 Kr. verdient: in wie viel Wochen können 24 Schuhmacher so viel verdienen als 42 Kleidermacher in 15 Wochen?

15) Man hatte einen Vertrag geschlossen, nach welchem 12 Arbeiter 800 Thlr. erhalten sollten, um dafür 16 Wochen und täglich 8 Stunden zu arbeiten. Wie viel hat man aber zu zahlen, wenn 20 Arbeiter 9 Wochen lang, und täglich 10 Stunden arbeiten?

16) Wenn das Pfund Garn $3^7/_8$ Ellen $1^1/_2$ Ellen breites Tuch gibt: wie viel Pfund von dem nämlichen Garn muß man zu $232^1/_2$ Ellen $1^3/_4$ Ellen breites Tuch haben?

17) Einen Saal zu belegen, welcher $6^1/_2$ Ruthen lang und $3^3/_4$ Ruthen breit ist, hat man 256 Bretter, jedes 12 Schuh lang und $1^7/_8$ Schuh breit, gebraucht. Wie viele Bretter, jedes 16 Schuh lang und $1^1/_2$ Schuh breit, wird man zu einem andern Saale brauchen, der 9 Ruthen lang und 5 Ruthen breit ist?

18) 3640 Soldaten können mit einem gewissen Vorrath $7^1/_2$ Monate lang erhalten werden, wenn man einem jeden täglich 2 Pfund gibt. Wie viel

Mann können, wenn man einem jeden täglich $1/_4$ Pfund weniger gibt, 13 Monate lang erhalten werden?

19) Wenn 6 Stämme Holz, deren jeder 10 Fuß lang, 3 Fuß breit und 2 Fuß dick ist, 6 Thlr. kosten: was kosten 15 Stämme, jeder 8 Fuß lang, $3^1/_2$ Fuß breit und 3 Fuß dick?

20) Wie viele Waizengarben mögen auf einem Acker stehen, der 4860 Fuß lang und 336 Fuß breit ist, da auf einem viereckigen Platze desselben, der 36 Fuß lang und 30 Fuß breit ist, 15 Garben gebunden werden?

21) An einen Ort sollen 5400 Klaftern Holz, $4^1/_2$ Fuß lang und $6^1/_4$ Fuß breit und hoch, geliefert werden. Nun hat man gegenwärtig nur Holz vorräthig, von welchem die Klafter $4^1/_2$ Fuß lang und 6 Fuß breit und hoch ist. Wie viel Klaftern müssen von diesem Holze geliefert werden, damit gegenseitig kein Verlust entstehe?

22) Wenn in Preußen der Scheffel Roggen mit dem Umgelde $2^1/_2$ Thlr. kostet, so wieget ein Zweigroschenbrot 2 Pfund 6 Loth. Wie viel muß ein Dreigroschenbrot wiegen, wenn der Scheffel Roggen mit 3 Thlr. bezahlt wird?

23) Was kosten 24 Bremer Pfund im Golde, wenn 16 Pfund zu Hannover 7 Rthlr. im Kassengelde kosten, dieses aber sich zum Golde verhält wie 15 zu 14 und überdieß die Gewichte in Hannover und Bremen sich wie 1013 zu 1038 verhalten?

24) Ein gewisser Vorrath an Getreide reicht für 2000 Mann auf 60 Tage hin, wenn der Mann täglich 2 Pfund Brot erhält. Wie lang werden 1500 Mann damit ausreichen, wenn dem Manne täglich $2^1/_4$ Pfund gereichet werden?

25) Wenn 18 Weber in 10 Wochen 108 Stück 30 Ellen lange und $2^1/_2$ Ellen breite Leinwand verfertigen, indem sie wöchentlich 6 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten: wie viele Weber sind nöthig, um in 4 Wochen 20 Stück, jedes 25 Ellen lang und $1^1/_4$ Ellen breit, zu verfertigen, wenn sie wöchentlich 5 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten?

## II.

26) Ein Stück Tuch, welches 27 Ellen lang und $2^3/_4$ Ellen breit ist, kostet 81 fl. Wie viel ist ein anderes Stück von derselben Güte werth, welches $30^1/_2$ Ellen lang und $2^7/_8$ Ellen breit ist?

27) Man weiß, daß 24 Arbeiter in 12 Tagen 1440 Quadratruthen Feld umpflügen, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten. In wie viel Tagen werden 32 Arbeiter 2640 Quadratruthen umpflügen, wenn sie 11 Stunden des Tages arbeiten?

28) Auf ein Feld, welches 6 Ruthen lang und 3 Ruthen breit ist, können $^7/_{10}$ bayer. Metzen Getreide gesäet werden. Wie viel Getreide wird erforderlich sein, wenn das Feld 42 Ruthen lang und 25 Ruthen breit ist?

29) An einer Sache, welche 62 fl. gekostet hat, haben 5 Arbeiter $7\,^1/_2$ Woche lang gearbeitet. Wie viele Arbeiter sind erforderlich, um eine Sache, welche zu 124 fl. angeschlagen ist, in 15 Wochen zu vollenden?

30) Aus 4 Pfund Garn können 16 Ellen $1^1/_2$ Ellen breite Leinwand gemacht werden. Wie viel Ellen können aus 36 Pfund Garn verfertigt werden, wenn die Leinwand $1^3/_4$ Ellen breit werden soll?

31) Es soll eine Mauer, 47 Fuß lang, $9^2/_3$ Fuß hoch und $3^1/_2$ Fuß dick aufgeführt werden. Man will wissen, in wie viel Tagen sie fertig werden kann, da eine andere Mauer von 20 Fuß Länge, $7^1/_2$ Fuß Höhe und 3 Fuß Dicke bei einer gleichen Anzahl Arbeiter in 18 Tagen vollendet wurde.

32) Durch 6 Arbeiter wurde ein Feld von 950 Fuß Länge und $102^1/_2$ Fuß Breite in $2^3/_4$ Tagen bearbeitet. Nun soll ein anderes Feld, welches $650^3/_8$ Fuß lang und 89 Fuß breit ist, in 3 Tagen bearbeitet werden: wie viel Arbeiter müssen dazu genommen werden?

33) Ein viereckig zugehauener Baum von 18 Fuß Länge, 2 Fuß Breite und $1^1/_2$ Fuß Dicke wurde mit 22 fl. bezahlt. Wie hoch kommt ein gleicher Baum von 13 Fuß Länge, $1^3/_4$ Fuß Breite und $1^1/_4$ Fuß Dicke?

34) Um einen Abzugsgraben von 900 Fuß Länge, $2^1/_2$ Fuß Breite und 2 Fuß Tiefe auszuwerfen, waren 6 Arbeiter 4 Tage beschäftigt. Die Anlage eines andern Grabens, welcher 3 Fuß breit und $2^1/_4$ Fuß tief zu werden bestimmt ist, soll durch 8 Mann geschehen. Da jedoch hier die Arbeit schwieriger ist, und im letzten Fall $2^1/_2$ Kubikfuß auszuwerfen, eben so viel Zeit kostet, als bei ersterem $4^1/_2$ Kubikfuß: so fragt es sich, welche Länge der Graben nach Verfluß von 8 Tagen haben werde?

35) Durch 11 Weber, die wöchentlich 5 Tage und täglich 13 Stunden gearbeitet haben, sind in 17 Wochen 103 Stücke Leinwand, jedes 29 Ellen lang und $^5/_4$ Ellen breit, verfertiget worden. In wie viel Wochen werden 19 Weber 83 Stücke, deren jedes 37 Ellen lang und $^3/_4$ Ellen breit sein soll, weben, wenn sie wöchentlich 6 Tage und täglich 9 Stunden arbeiten?

§. 130. Wenn in der Zinsrechnung die Antwort von mehren Verhältnissen abhängt, so heißt sie die zusammengesetzte Zinsrechnung (im Gegensatze der einfachen, welche §. 125. abgehandelt wurde) und gehört ganz zur zusammengesetzten Proportionsrechnung, weßhalb sie auch ihren Grundsätzen folgt, wie nachstehende Beispiele lehren werden:

1) Wenn ein Kapital von 3200 fl. zu 5 Procent ausgeliehen ist: wie viel betragen die Zinsen nach $2^1/_2$ Jahren? — Der Ansatz ist offenbar

$$\left.\begin{array}{l} 100 \text{ fl.} : 3200 \text{ fl.} \\ 1 \text{ Jahr} : 2^1/_2 \text{ Jahren} \end{array}\right\} = 5 \text{ fl. Zins.} : x \text{ fl. Zins.}$$

$$\text{und } x = \frac{3200 \times 2\frac{1}{2} \times 5}{100 \times 1} = 400 \text{ fl.}$$

2) Wie hoch belaufen sich die Zinsen zu 4 Procent von 2000 Thlrn. in 6 Jahren, wenn die Zinsen zu 5 Procent von 2600 Thlrn in 10 Jahren 1300 Thlr. betragen? — Hier ist

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 & : & 4 \\ 2600 & : & 2000 \\ 10 & : & 6 \end{array}\right\} = 1300 : x$$

$$\text{und } x = \frac{4 \times 2000 \times 6 \times 1300}{5 \times 2600 \times 10} = 480 \text{ Thlr.}$$

3) 800 Thlr. trugen in 9 Monaten 24 Thlr. Zinsen: zu wie viel Procent waren dieselben ausgeliehen? — Es ist hier

$$\left.\begin{array}{rcl} 800 & : & 100 \\ 9 & : & 12 \end{array}\right\} = 24 : x$$

$$\text{und } x = \frac{100 \times 12 \times 24}{800 \times 9} = 4 \text{ Procent.}$$

4) Wie lange dauert es, bis ein Kapital von 800 Mark zu $4^1/_2$ Procent auf 1016 Mark anwächst? — Das Kapital von 800 Mark muß, um auf 1016 Mark zu steigen, 216 Mark Zinsen tragen; demnach

$$\left.\begin{array}{l} 4^1/_2 : 216 \\ 800 : 100 \end{array}\right\} = 1 \text{ Jahr} : x$$

und $x = \frac{216 \times 100 \times 1}{4\frac{1}{2} \times 800} = 6$ Jahre.

5) Nach 8 Jahren ist Jemand 1224 Thlr. ohne Zinsen zu zahlen schuldig. Er will dieselben sogleich mit 900 Thlr. tilgen, indem er rechnet, daß sein Gläubiger durch Ausleihung der 900 Thlr. in 8 Jahren so viele Zinsen erhält, daß diese mit den 900 Thlr. obige Summe von 1224 Thlr. betragen. Wie hoch hat er den Zinsfuß gerechnet? — Offenbar müssen die 900 Thlr. in 8 Jahren 324 Thlr. Zinsen einbringen. Demnach ist

$$\left.\begin{array}{l} 900 : 100 \\ 8 : 1 \end{array}\right\} = 324 : x$$

und $x = \frac{100 \times 1 \times 324}{900 \times 8} = 4^1/_2$ Procent.

6) Wie groß muß das Kapital sein, welches, zu 5 Procent ausgeliehen, in $4^1/_2$ Jahren 900 fl. Zinsen einbringen soll? — Hier ist

$$\left.\begin{array}{l} 5 : 900 \\ 4^1/_2 : 1 \end{array}\right\} = 100 \text{ fl. Kapital} : x$$

und $x = 4000$ fl.

7) Am 10. Junius 1832 wurden 1400 Thlr. zu $3^1/_2$ Procent ausgeliehen und am 9. April 1833 wieder zurückgezahlt. Wie viel betragen die Zinsen?

$$\left.\begin{array}{l} 100 : 1400 \\ 12 : 10 \end{array}\right\} = 3^1/_2 : x$$

und $x = 40$ Thlr. 20 Gr. oder 40 Thlr. 25 Silbergroschen.

§. 131. Noch folgen einige Beispiele zur eigenen Uebung:

1) Was betragen die Zinsen von 975 fl. (oder

Thlrn. oder Marken) in 3 Jahren $5^4/_5$ Monaten bei 5 Procent?

2) Wie lange muß ein Kapital von 650 Thlr. bei 6 Procent ausstehen, um 312 Thlr. Zinsen zu tragen?

3) Wie groß muß das Kapital sein, welches bei 4 Procent in 3 Jahren 4 Monaten 340 Thlr. (Mark oder Gulden) Zinsen tragen soll?

4) Von einem Kapital, das zu 4 Procent ausgeliehen ist, erhält man in $1^1/_2$ Jahren 72 Thlr. Zu wie viel Procent muß dasselbe ausgeliehen werden, damit es in 1 Jahre 54 Thlr. Zinsen eintrage?

5) Zu wie viel Procent war ein Kapital von 6000 Thlrn. ausgeliehen, von welchem man in 8 Jahren 2160 Thlr. Zinsen erhalten hat?

6) Es waren 200 fl. zu 4 Procent 3 Jahre, 1400 fl. zu 5 Procent 2 Jahre und 2200 fl. zu $4^1/_2$ Procent 4 Jahre ausgeliehen. Wie viel betragen die Zinsen?

7) Von 100 fl. Kapital hat man jährlich 4 fl. Zinsen zu erheben; wie viel von 750 fl. in $2^1/_2$ Jahren?

8) Was betragen die Zinsen eines Kapitals von 2300 Thalern in 8 Monaten, wenn dasselbe zu $4^1/_2$ Procent ausgeliehen ist?

9) Man hat von 2350 fl. in $18^2/_3$ Monaten 164 fl. 30 Kr. Zinsen erhalten. Zu wie viel Procent hat man die Zinsen angerechnet?

10) Wenn ein Kapital zu 4 Procent Zinsen ausgeliehen ist: wie lange müssen 1250 Thaler ausstehen, um davon 400 Thaler Zinsen zu erheben?

11) Wenn ein Kapital zu $3^1/_4$ Procent ausgeliehen ist: wie groß muß dann ein Kapital sein, wenn

man davon in $3^1/_2$ Jahren 250 fl. Zinsen einnehmen will?

12) Wie groß muß ein Kapital sein, von welchem man in 4 Jahren bei 3 Procent Zinsen 600 fl. Zinsen erheben will, wenn 700 fl. Kapital bei 5 Procent Zinsen jährlich 35 fl. abwerfen?

## III. Kettenregel.

§. 132. Es gibt Aufgaben, in welchen das Verhältniß zweier Größen nicht unmittelbar bekannt ist, sondern erst durch gegebene Zwischenverhältnisse bestimmt werden muß. Die Rechnungsweise, worin dieß geschieht, heißt die **Kettenregel**. Sie hat ihren Namen von der Art, wie die Größen zusammengestellt werden. Man vertauscht nämlich nach derselben eine Gattung von Größen folgeweise gegen eine andere, bis man auf diejenige kommt, nach welcher gefragt wird. Sie wird bei solchen Größen gebraucht, welche in geradem Verhältniß zu einander stehen, namentlich bei der Vergleichung von Maaßen, Gewichten, Münzen, bei der Vertauschung von Waaren und Geld, wohin auch Gold und Silber als Waaren gehören, bei Angabe des Gewinnstes und Verlustes u. s. w.

Gemeiniglich werden hier die Proportionen als gleiche Produkte angegeben, z. B. 5 sächsische Thaler betragen 9 Gulden rhn. (5 sächs. Thlr. = 9 fl. rhn.); nicht so häufig in der Gestalt einer Proportion, als: der sächs. Thaler verhält sich zum Gulden rhn. wie 9 zu 5 (1 sächs. Thlr. : 1 rhn. fl. = 9 : 5); wiewohl beide Angaben dem Wesen nach einerlei sind (§. 106. 107). Einfacher aber und bequemer sind die

Gleichungssätze. Deßhalb zieht man diese in der Angabe und in dem Ansatze vor. Z. B. Wenn 5 Konventionsthaler 12 Gulden rhn. betragen, 1 Louisd'or 9 fl. rhn. werth ist, 7 fl. Kassengeld 1 Louisd'or geben und 3 fl. Kassengeld 2 Thalern hannövrisch am Werthe gleichen: wie viel betragen dann 200 Konventionsthaler in hannöverischen Thalern Kassenmünze?

Was nun den Ansatz in und nach der Kettenregel betrifft, so wird oben linker Hand die zu suchende unbekannte Zahl gesetzt, und ihr gegenüber die Fragezahl d. h. diejenige Zahl, von welcher man Etwas wissen will. Darunter setzt man die übrigen Vergleichungssätze so, daß zur Linken immer diejenige Zahl oder Größe zu stehen kommt, welche mit der nächstvorhergehenden zur Rechten geschriebenen Zahl gleichartig ist, und zur Rechten diejenige, welche mit ihr als gleich verbunden ist. Auf diese Weise wird mit allen gegebenen Vergleichungssätzen fortgefahren, bis man zur Rechten auf diejenige Größe kommt, welche mit der zu suchenden gleichartig ist. Sind noch Spesen oder Unkosten, ferner Gewinn und Verlust, welche gemeiniglich nach Procenten berechnet werden, angegeben, so werden sie gleichfalls in Ansatz gebracht. Nun werden die Zahlen in jeder Reihe für sich multiplicirt und mit dem Produkte linker Hand in das Produkt rechter Hand dividirt. Der Quotient gibt die gesuchte Zahl. Daß man auch hier zur Abkürzung der Rechnung in beiden Reihen gleichgroße Zahlen oder Faktoren gegenseitig durch die Division aufheben und ausstreichen könne, wird ein Jeder leicht begreifen. Nach diesen Vorschriften wird nun obige Aufgabe also angesetzt und berechnet:

| | | |
|---|---|---|
| x hannöv. Thlr. | = | 200 Konv. Thlr. |
| 5 Konv. Thlr. | = | 12 fl. rhn. |
| 9 fl. rhn. | = | 1 Louisd'or |
| 1 Louisd'or | = | 7 fl. Kassenmünze |
| 3 fl. Kass. | = | 2 hannövr. Thlr. |

$$x \cdot 5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3 = 200 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2$$

und $x = \frac{200 \cdot 12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3} = 248^8/_9$

d. h. 200 Konventionsthaler machen $248^8/_9$ hannövrische Thaler.

Man hätte aber auch gleich Anfangs wirklich multipliciren können; dann kommt

$$x = \frac{33600}{135} = 248^8/_9 \text{ hannövr. Thlr.}$$

Auch konnte man 5 in 200 und 3 in 12 aufgehen lassen; dann ist einfacher

$$x = \frac{2240}{9} = 248^8/_9 \text{ hannövr. Thlr.}$$

Nach der Angabe und dem Ansatze von Proportionen sieht die Rechnung also aus:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Konv. Thlr. | : rhn. fl. | = | 12 : 5 |
| rhein. fl. | : Louisd'or | = | 1 : 9 |
| Louisd'or | : fl. Kassengeld | = | 7 : 1 |
| fl. Kassengeld | : hann. Thlr. | = | 2 : 3 |
| Konv. Thlr. | : hann. Thlr. | = | 12.1.7.2:5.9.1.3 |

und 1 Konv. Thlr. $= \frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3}$

folglich 200 Konv. Thlr. $= 200 \cdot \frac{12 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 2}{5 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3} =$ $248^8/_9$ hannövr. Thlr.

§. 133. Nun wird man ohne Anstand von folgenden Aufgaben Ansatz und Berechnung begreifen; wenn nur noch bemerkt wird, daß man statt der

sämmtlichen Gleichheitszeichen ( = ) der Kürze wegen einen senkrechten Strich eingeführt hat.

1) Wenn 3 Ellen 25 fl. Bankogeld kosten und 5 fl. Banko 7 fl. Kurant sind: was kosten 36 Ellen in Gulden Kurant?

| | |
|---:|:---|
| x fl. Kurant | 36 Ellen |
| 3 Ellen | 25 fl. Bank. |
| 5 fl. Bk. | 7 fl. Kurant. |

x = 350 fl. Kurant.

2) Man nimmt an, daß 2 fl. holländ. Kurant 1 Thlr. in Leipzig ausmachen, ingleichen, daß 84 brabanter Ellen 100 leipziger Ellen gleich sind. Wenn nun 65 brab. Ellen 593 fl. holl. Kur. kosten: wie hoch kommt in Leipzig die Elle?

| | |
|---:|:---|
| x Thlr. Leipz. | 1 Elle Leipz. |
| 100 leipz. Ellen | 84 brab. Ellen |
| 65 brab. Ellen | 593 fl. holl. Kur. |
| 2 fl. holl. Kur. | 1 Thlr. Leipz. |

x = $3\frac{2703}{3250}$ Thlr. oder 3 Thlr. 19 Gr. $11\frac{857}{1625}$ Pf.

3) Jemand kauft in Hamburg einen Wechsel von 400 Dukaten und reiset damit nach Königsberg. Wie viel Gulden polnisch wird man ihm dafür zahlen, wenn der Dukaten in Hamburg 1 Procent besser als Banko, und der Kurs zwischen Hamburg und Königsberg 156 Groschen polnisch ist? — Der Dukaten 1 Procent besser als Banko heißt: man rechnet 101 Thlr. Banko anstatt 100 Thlr. Banko, welche man gegen Dukaten wechselt. Da nun 1 Dukaten gewöhnlich zu 2 Thlr. Banko gerechnet wird, folglich 50 Dukaten = 100 Thlr. Banko sind, so rechnet man doch 50 Dukaten zu 101 Thlr. Banko. Der Kurs zwischen Hamburg und Königsberg bedeutet: 1 Thlr.

Banko = 156 Gr. poln. Demnach ist die Berechnung folgende:

| | |
|---:|:---|
| x fl. poln. | 400 Dukaten |
| 1 Duk. | 2 Thlr. in Dukaten |
| 100 Thlr. | 101 Thlr. Banko |
| 1 Thlr. Bk. | 156 Gr. poln. |
| 30 Gr. poln. | 1 fl. poln. |

$x = 4201^3/_5$ fl. poln. oder 4201 fl. 18 Gr. poln.

4) Ein Kaufmann kauft den Centner Kaffee um 56 fl. Er verkauft ihn gebrennt, wobei an jedem Pfund im Durchschnitt 8 Loth durch das Brennen verloren gehen. Wie hoch muß er das Loth geben, wenn er 25 Procent gewinnen will?

| | |
|---:|:---|
| x Kreuzer | 1 Loth |
| 24 Loth | 1 Pfund |
| 100 Pfd. | 56 fl. |
| 100 fl. | 125 fl. |
| 1 fl. | 60 Kr. |

$x = 1^3/_4$ Kr. = 1 Kr. 3 Pfennige.

5) In Preußen wurde der Centner einer Waare um 27 Thlr. gekauft und das Pfund um 9 Silbergroschen verkauft. Wie viel Procent ist gewonnen oder verloren worden?

| | |
|---:|:---|
| x Thlr. | 100 Thlr. |
| 27 Thlr. | 1 Ctl. |
| 1 Ctl. | 110 Pfund |
| 1 Pfd. | 9 Silbergr. |
| 30 Slbrgr. | 1 Thlr. |

$x = 122^2/_9$ Thlr.

d. h. für 100 Ausgabe gehen $122^2/_9$ Einnahme ein; darum ist hier Gewinn und zwar vom Hundert

$122^2/_9 - 100 = 22^2/_9$ oder es findet hier $22^2/_9$ Procent Gewinn statt.

6) Das Pfund einer Waare in Hamburg kostet $4^1/_2$ Mark Banko, mit 8 Procent Rabatt. Die Louisd'or stehen 41 Procent schlechter als Banko. Die Unkosten bei der Versendung betragen 2 Procent. Das magdeburger Gewicht ist um $3^1/_2$ Procent leichter als das hamburger. Wie viel Thaler in Louisd'or wird nun das Pfund in Magdeburg kosten, da 3 Mark Bk. auf einen Thlr. Bk. gehen?

| | |
|---|---|
| x Thlr. Louisd'or | 1 Pfd. Magd. |
| $103^1/_2$ | 100 Pfd. Hamb. |
| 1 | $4^1/_2$ Mark Hamb. Bank |
| 3 | 1 Thlr. Hamb. Bank |
| 108 | 100 Thlr. Hamb. Bk. Rabatt |
| 100 | 141 Thlr. Louisd. |
| 100 | 102 Thlr. Unkosten. |

$x = 1^{385}/_{414}$ Thlr.

§. 134. Es gibt Aufgaben, in welchen die Zwischenverhältnisse weggelassen sind und als bekannt vorausgesetzt werden. Z. B. Wie viel Pfennige kostet 1 Bogen Papier, wenn der Ballen 40 Thlr. preuß. kostet?

| | |
|---|---|
| x Pfenn. | 1 Bogen |
| 24 | 1 Buch |
| 20 | 1 Rieß |
| 10 | 1 Ballen |
| 1 | 40 Thlr. |
| 1 | 30 Silbergr. |
| 1 | 12 Pfennige. |

x = 3 Pfennige.

§. 135. Wenn blos eine Vergleichung zwischen

zweierlei Größen und ihren Einheiten gesucht wird, so fällt der Fragesatz weg. Man fängt dann mit dem Vergleichungssatze für die eine Gattung von Größen an und fügt die Vergleichungssätze nach der Reihe hinzu, bis man zu demjenigen für die andere Gattung kommt, die mit jener erstern verglichen werden soll. Z. B. Wie verhält sich der Werth des Goldes zu dem des Silbers, wenn

| | | |
|---|---|---|
| 1 Mark fein Silber | = | 21 Gulden preuß. |
| 3 fl. | = | 2 Thlr. pr. |
| $5^1/_2$ Thlr. | = | 1 Friedrd'or |
| 35 Frd'or | = | 1 Mark Gold (zu $21^2/_3$ Kar.) |
| 25 M. G. ($21^2/_3$ K.) | = | $21^2/_3$ Mark Gold (zu 24 Kar.) |
| 198 Mark fein Silber | = | 13 Mark fein Gold |

oder Mark f. Gold : Mark f. Silber = 198 : 13 = $15^3/_{13}$ : 1 d. h. das Gold ist $15^3/_{13}$mal so hoch am Werth wie Silber.

§. 136. Zur eigenen Uebung mögen folgende Beispiele dienen:

I.

1) Wenn 3 Silberrubel in Rußland 1 Dukaten gelten, 6 Dukaten 17 Thlr. sächsisch und 20 Thlr. sächs. 21 Thlr. preuß. betragen, ferner wenn der preuß. Thlr. zu $1^3/_4$ fl. rhn. genommen wird: welchen Werth hat der Silberrubel in rheinischer Währung?

2) Von einer Waare werden 8 Pfund mit 5 Thlr. gekauft. Wie theuer müssen 4 Pfund wieder verkauft werden, um 20 Procent zu gewinnen?

3) Wenn 9 Louisd'or = 16 Dukaten; 1 Duk. = 9 Mark und 3 Mark = 1 Thlr. sind: so frägt sich, wie viel Thaler auf eine Louisd'or gehen und wie viel Louisd'or 10000 Thlr. betragen?

4) Wie viel kostet 1 Pfd. Kaffee leipz. Gewicht in sächs. Groschen, wenn 100 Pfd. amsterd. Gew. 120 holländ. fl. kosten und 5 holl. fl. = 2 holl. Thlr., 100 holl. Thlr. = 47 holl. Duk.; 6 Duk. = 17 sächs. Thlr. und 1 sächs. Thlr. = 30 Sgr., ingleichen 56 amsterd. Pfd. = 57 hamb. und 27 hamb. Pfd. = 28 leipz. sind?

5) Wie viel bayerische Fuß sind 100 englische Fuß, wenn 81 englische gleich sind 76 pariser; 29 pariser gleich 30 rheinländischen, und 93 rheinländische gleich 100 bayerischen Fußen?

6) Man verlangt das Verhältniß des hamb. Schillings zu dem sächsischen Groschen zu wissen, wenn 16 Schill. = 1 Mark sind; 57 Mark = 4 Louisd'or; 3 Ld'or = 16 sächs. Thlr. und 1 s. Thlr. = 30 Sgr.

7) Man soll das Verhältniß der persischen Parasange zur teutschen Meile bestimmen. Man weiß, daß 10 Parasangen 9 brabantische Meilen machen; 1 brabantische Meile 3 italienische; 4 italienische 1 große polnische; 5 große polnische 6 portugiesische; 9 portugiesische 5 westphälische und 2 westphälische 3 gemeine teutsche.

8) Wenn 7 fl. rhn. 4 preußische Thaler, 155 preußische Thaler 100 hamburger Banko, 100 Thaler hamburger Banko $140\frac{1}{2}$ Thaler dänisches Kurant, $131\frac{1}{2}$ Thaler dänisches Kurant 100 Thaler holländisches Kurant, 1 holländischer Thaler $8\frac{1}{3}$ Schillinge flämisch, 38 Schillinge flämisch holländischen Bankogeldes 1 Pfund Sterling machen: was wird 1 Pfund Sterling nach rheinischen Gulden werth sein?

9) Was ist ein hamburger Schilling Kurant an rheinischen Kreuzern werth, wenn 60 Kr. auf einen Gulden gehen, 24 fl. gleich sind $9\frac{5}{24}$ hamburger

Thalern Banko, 1 Thlr. Banko gleich 3 Mark Banko, und die Mark Kurant 24 Procent gegen Banko verliert (d. h. 124 M. K. = 100 M. Bko.) und die Mark 16 Schillinge enthält?

10) Wenn 84 amsterdam. Pfd. 65 Thaler hamburger Banko kosten: wie viel hannöverische Kuranthaler kostet 1 Pfd. hannöverisch Gewicht, da man weiß, daß 102 hannöverische Pfd. gleich sind 98 amsterdamer Pfd., und 10 hamburger Bankothaler so viel betragen als 13 hannövrische Kuranttthaler?

11) Es sind 325 Pfd. einer Waare um 450 fl. eingekauft worden. Wie hoch muß man 1 Pfd. wieder verkaufen, wenn 30 vom Hundert sollen gewonnen werden?

12) In Hamburg kosten 57 Pfd. hamb. Gewicht 63 Thlr. Kurant. Wie viel sächsische Thaler kostet 1 leipziger Pfd., wenn 25 hamburger Pfd. so viel sind als 26 leipziger Pfd., und der Wechselkurs 12 Procent zum Vortheil der Hamburger ist d. h. wenn 100 Thlr. hamburger Kurant in Leipzig 112 Thaler gelten, und man überdieß 16 vom Hundert gewinnen will?

II.

13) Wie viele amsterdamer Bankogulden kosten 35 englische Ellen, wenn 40 amsterdamer Ellen 24 Schillinge Sterling kosten, und 3 englische Ellen 4 amsterdamer, überdieß $2^1/_2$ Schilling Sterling 1 fl. Banko ausmachen?

14) Man will wissen, wie die römischen Pfunde sich zu den kopenhagischen verhalten, da 7 röm. Pfd. 5 nürnbergische, 25 nürnbergische 28 Pfd. in London, ferner 16 london. Pfd 13 Pfd. zu Prag, und 18 prager 15 zu Kopenhagen ausmachen.

15) Wie viel Procent gewinnt oder verliert derjenige, welcher den Centner Kaffee um 40 Thlr. einkauft, denselben brennt, dadurch an jedem Pfund 8 Loth verliert und das Loth um 5 Pfennige gibt?

16) Wie viel gute Groschen kostet das Loth einer Waare, von welcher das Pfund 8 Thlr. 16 Gr. in Louisd'or kostet, da man für 100 Thlr. in Louisd'or beim Verwechseln 115 Thlr. Kurant erhält?

17) Wie viele fl. gilt ein Napoleonsd'or, da 1 Napoleonsd'or 20 Franken, 80 Franken 81 Livre's, 1 Livre $27^1/_2$ Kreuzer ist?

18) Wie viel hannövrische Pfund machen 4851 würtemberger Pfund, wenn 102 Pfd. zu Hannover = 98 Pfd. amsterdamer, 108 Pfd. zu Amsterdam = 110 Pfd. zu Leipzig, 5 Pfd. zu Leipzig = 6 Pfd. zu Danzig, 121 Pfd. zu Danzig = 108 Pfd. zu Frankfurt und 25 Pfd. zu Frankfurt = 27 würtemberger Pfd. sind?

19) Man weiß, daß 6 hamburger Ellen 5 brabanter ausmachen, 8 hamb. Ellen mit 5 Gulden bezahlt werden, 4 preuß. Thaler im Handelsverkehr 7 fl. gelten und $13^1/_3$ Thlr. sächsisch 14 Thlr. preuß. ausmachen. Wie hoch kommen 112 brabanter Ellen nach sächsischem Gelde?

20) Jemand bezahlt eine Waare, die 570 hamburger Pfund wiegt, mit 11 Friedrichsd'or (zu 5 Thlrn. gerechnet). Wenn nun 106 hamb. Pfund so viel als 110 berliner Pfd. sind, das Gold aber gegen Kurant 14 Procent hoch steht: wie viel Groschen preuß. Kurant und wie viel Silbergroschen kostet ein Berliner Pfund?

21) Wenn sich der wiener Fuß zum pariser wie 1401 : 1440, der pariser zum turiner wie 720 : 1139,

der turiner zum londoner wie 2277 : 1351, und der londoner zum berliner wie 3378 : 3433 verhält, so fragt man: wie verhält sich der wiener Fuß zum berliner; und wie viel wiener Fuß sind in 102 berliner Fußen enthalten?

22) Wie viel Kreuzer kostet in Bayern das Loth einer Waare, von welcher in Preußen der Centner 40 Thaler preuß. kostet, wenn 116 preuß. Centner 107 bayerische Centner ausmachen?

23) Wenn ein Kaufmann 3 Centner Waare bremer Gewicht für 279 Thlr. Gold kauft: zu wie viel Pfennigen Kassenmünze muß er das Loth in hamburger Gewicht ansetzen, wenn er 20 Procent gewinnen will, 100 bremer Pfund gleich 99 hamburger Pfunden und 14 Thlr. Kassengeld gleich 15 Thlr. Gold sind, und der bremer Centner 116 Pfund hält?

24) Jemand will 3000 Franken in Gulden umsetzen; er hat aber beim Wechseln 1 Procent Verlust d. h. er erhält anstatt 100 nur 99 berechnet. Ueberdieß betragen 80 Franken 81 Livre's, 6 Livre's 1 Laubthaler, $8^4/_5$ Laubthaler $13^1/_3$ Thaler Konventions-Kurant und ein solcher Thaler beträgt $1^4/_5$ fl. Wie viel Gulden wird er also für seine 3000 Franken erhalten? und wie viel hätte er bekommen, wenn er keinen Verlust im Wechseln gehabt hätte?

## IV. Gesellschafts- oder Theilungs-Rechnung.

§. 137. Wenn mehre Personen zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung zusammen treten, und eine Kasse errichten, wozu die Beiträge der einzelnen Mit-

glieder von verschiedener Größe sind: so ist es nicht mehr als billig, daß der Gewinn oder Verlust nach dem Verhältniß der Größe der einzelnen Beiträge bestimmt werde. Denn wer dreimal so viel als ein anderer gegeben hat, macht auch auf einen dreifach größern Theil Anspruch; wogegen er aber auch bei entstandenem Verlust dreimal so viel verliert. Ueberdieß verdient man sich ja auch sonst mit dem doppelten Gelde das Doppelte. Die Gesellschaftsrechnung lehrt nun, in solchen Fällen die gerechten und verhältnißmäßigen Theile bestimmen und finden; sie gründet sich daher ganz auf den obigen (§. 116) Satz: Eine Zahl in mehre Theile zu theilen, daß diese Theile sich wie gegebene andere Zahlen verhalten. Die dortige Auflösung gibt also auch das Verfahren für die Gesellschaftsrechnung, nämlich: Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen (welches z. B. die einzelnen Beiträge sind), die man aber zur Erleichterung der Rechnung auf die kleinsten Zahlen bringen kann (vermöge §. 111 — 113) und setze ihre Summe in das erste Glied der Proportion, jede einzelne Verhältnißzahl nach der Reihe in das zweite Glied, und dann in das dritte die zu theilende Größe; dazu suche man (nach §. 110) das vierte Glied, welches so oft geschehen muß, als einzelne Verhältnißzahlen d. i. Theilnehmer der Gesellschaft vorhanden sind. Jedes gefundene vierte Glied gibt den Antheil jeder Person nach der Reihe an. Beispiele:

1) Vier Personen fangen einen Getreidehandel an; A gibt dazu 100 fl., B 130, C 75 und D 200. Sie gewinnen damit 230 fl. Was wird davon auf eines Jeden Antheil kommen? Weil 100 + 130 + 75 + 200 = 505 sind, so setze man:

505 : 100 = 230 : Antheil des A
505 : 130 = 230 : „ „ B
505 : 75 = 230 : „ „ C
505 : 200 = 230 : „ „ D

Und es ist der Antheil des A $= \frac{100 \times 230}{505} = 45$ fl. 32 Kr. $2^{70}/_{101}$ Pfennige. Auf gleiche Weise wird man finden, daß B 59 fl. 12 Kr. $1^{91}/_{101}$ Pf., C 34 fl. 9 Kr. $2^{2}/_{101}$ Pf. und D 91 fl. 5 Kr. $1^{39}/_{101}$ Pf. erhält. Die Summe dieser einzelnen Gewinnste muß wieder dem ganzen Gewinnste gleich sein.

2) Drei machen eine Gesellschaft; A legt dazu 120 fl., B 150 fl. und C 180 fl. Sie sind aber in ihrem Unternehmen unglücklich und verlieren 124 fl. Wie viel muß ein Jeder am Verlust tragen? Es ist 120 + 150 + 180 = 450. Demnach setzt man richtig also an:

450 : 120 = 124 : Verlust des A
450 : 150 = 124 : „ „ B
450 : 180 = 124 : „ „ C

Es lassen sich aber hier die einzelnen Beiträge mit ihrer Summe auf weit kleinere Verhältnißzahlen bringen, nämlich die Verhältnisse der Zahlen 120 : 150 : 180 sind wie 4 : 5 : 6 und überdieß 4 + 5 + 6 = 15. Demnach ist der einfachere Ansatz:

15 : 4 = 124 : Verlust des A
15 : 5 = 124 : „ „ B
15 : 6 = 124 : „ „ C

und man findet, daß A 33 fl. 4 Kr., B 41 fl. 20 Kr. und C 49 fl. 36 Kr. verlieret.

3) Zwei Personen pachten eine Wiese für 25 fl. A läßt 12 Kühe, B aber nur 8 Kühe darauf weiden. Wie viel muß Jeder zum Pachtgeld zahlen?

Weil die Verhältnißzahlen 12 : 8 wie 3 : 2 sind, und 3 + 2 = 5 ist, so ist

5 : 3 = 25 : Pachtgeld des A

5 : 2 = 25 : „ „ B

d. h. A zahlt 15 fl. und B 10 fl.

§. 138. Die bisherigen Rechnungen setzten voraus, daß jedes Mitglied gleichlang in der Gesellschaft gewesen sei. Wenn aber Jemand seinen Beitrag noch einmal so lang stehen hat, als ein Anderer, so kann er auch noch einmal so viel Antheil fordern: kurz der Antheil eines Jeden hängt auch von der Zeit und ähnlichen Umständen ab. In solchen Fällen erhält man ein zusammengesetztes Verhältniß, nämlich die Gewinnste oder Verluste verhalten sich, wie die Produkte aus den Beiträgen in die Zeiten. Z. B. Zwei haben in einer Handlung, A 90 Thlr. 3 Monate lang, und B 120 Thlr. 2 Monate lang; sie gewinnen damit 125 Thlr. Was wird der Gewinnst eines Jeden sein? Die Verhältnißzahlen sind hier 90 . 3 = 270 und 120 . 2 = 240. Es verhält sich aber 270 : 240 wie 9 : 8 und 9 + 8 = 17. Demnach ist der einfachere Ansatz:

17 : 9 = 125 : Gewinn des A

17 : 8 = 125 : „ „ B

und es gewinnt A $\frac{9 \times 125}{17} = 66^{3}/_{17}$ Thaler und B $\frac{8 \times 125}{17} = 58^{14}/_{17}$ Thlr. Die Thalerbrüche kann man noch in Groschen verwandeln.

Eben so verhält es sich, wenn verschiedene Fuhren mit mehr und weniger Thieren geschehen. In diesem Falle hängt der Antheil an dem Fuhrlohne ab von dem Produkte der Fuhren in die Zahl der Thiere Z. B.

Zu einem Straßenbau hat A 7 Fuhren mit 3 Pferden, und B 5 Fuhren mit 4 Pferden gethan. Ihr gemeinschaftlicher Lohn ist 24 fl. Wie viel kommt Jedem zu? Es ist 7 . 3 = 21; ferner 5 . 4 = 20, und 21 + 20 = 41. Demnach

41 : 21 = 24 : Lohn des A

41 : 20 = 24 : „ „ B.

Hieraus ist der Antheil des A $12^{12}/_{41}$ fl. und des B Antheil $11^{29}/_{41}$ fl.

§. 139. Folgende Aufgaben mögen zur Uebung in der Gesellschaftsrechnung dienen.

1) Ein Mann geräth in Konkurs; A hatte zu fordern 75 fl., B 500 fl., C 1000 fl. und D 860 fl. Nach der Inventur betrug das übrige Vermögen nur 1625 fl. Wie viel wird jeder Gläubiger bekommen?

2) In einem Dorfe sollen die dasselbe treffenden Einquartierungskosten von 25 fl. nach dem Steuerfuß ausgeschlagen werden. Wenn nun A mit 320 fl. in der Steuer liegt, B mit 530, C mit 175, und D mit 212 fl.; was wird ein Jeder an den 25 fl. bezahlen müssen?

3) Drei Kaufleute vereinigen sich zu einer gewissen Unternehmung, so daß A 100 Thlr. auf 2 Monate, B 150 Thlr. auf 3 Monate, und C 110 Thlr. auf 6 Monate hergibt. Mit diesem Gelde werden 655 Thlr. gewonnen; wie viel bekommt nun ein Jeder davon?

4) Drei Fuhrleute fahren Steine zu einem Baue herbei; der eine thut 28 Fuhren mit 1 Pferde, der andere 35 mit 2 Pferden, und der dritte 42 mit 3 Pferden. Sie bekommen dafür zusammen 50 fl.; wie viel wird Jeder davon erhalten?

5) Ein Soldatenquartier kostet 3 Orten, welche

für 33 Höfe gelten, überhaupt 112 fl. Da nun A aus 13 Höfen, B aus 12 und C aus 8 Höfen bestehet, so fragt es sich: wie viel ein jedes Dorf an den Kosten zu tragen habe?

6) Auf einem Hause haften folgende Schulden: erstens 8500 fl., zweitens 5000 fl., drittens 3500 fl. und viertens 2000 fl. Das Haus wird auf Antrag der Gläubiger verkauft, und da es für nicht mehr als 18510 fl. erstanden wird: was bekommt ein jeder Gläubiger?

7) Zu einer gewissen Unternehmung treten sechs Personen zusammen, und legen ein: A 460 fl., B 700 fl., C 360 fl., D 540 fl., E 800 fl. und F 680 fl. Sie gewinnen 3816 fl. Was kommt einem Jeden nach seiner Einlage von diesem Gewinnste zu?

8) Drei Personen haben die Summe von 5832 Thalern unter sich zu theilen. Die Theile der drei Personen A, B und C sollen sich aber zu einander verhalten, wie die Zahlen $^1/_2$, $^4/_7$ und $^3/_8$. Wie werden nun die Antheile ausfallen?

9) Die Summe von 100 fl. sollen 6 Personen A, B, C, D, E und F so unter sich theilen, daß die Theile sich zu einander verhalten, wie die Zahlen $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_7$, $^1/_9$ und $^1/_{12}$. Wie viel wird einem Jeden zukommen?

10) Drei Kaufleute haben zusammen gehandelt. A hat 200 Thlr. 7 Monate lang in der Handlung liegen, B 350 Thlr. 5 Monate lang, und C 190 Thlr. 8 Monate lang. Sie trennen sich und finden, daß sie 120 Thlr. Verlust haben. Wie viel büßt Jeder ein?

11) Vier Kaufleute haben sich zu einer Unternehmung vereiniget. Der erste nimmt daran mit

2500 fl. Antheil auf 18 Wochen, der andere schießet 4200 fl. auf 10 Wochen her; der dritte läßt seinen Antheil von 5000 fl. 9 Wochen lang gebrauchen, und der Antheil des letzten von 6800 fl. bleibet 7 Wochen stehen. Was bekommt nun ein jeder von ihnen von dem Gewinne, welcher 3400 fl. beträget?

12) Ein Herr vermacht seinen Dienstboten 1200 Thlr., worein sie sich nach dem Verhältnisse ihres bisherigen Lohnes theilen sollen. Nun hat der Kammerdiener jährlich 40 Thlr., der Koch 36 Thlr. und die Dienstmagd 24 Thlr. erhalten. Wie viel wird demnach jeder Dienstbote erhalten?

13) Von 5 Dörfern müssen zu einer Brandschazzung, die der Feind auflegte, 2416 Thlr. beigetragen werden. Man findet es für natürlich und billig, daß die 5 Dörfer nach dem Verhältnisse ihres Steuerfußes zahlen. Nun steht das Dorf A mit 85 Thlrn., das Dorf B mit 70 Thlrn., C mit 75 Thlrn., D mit 70 Thlrn. und E mit 40 Thlrn. in der Steuer. Welches ist der Beitrag eines jeden Dorfes zu obigen 2416 Thlrn.?

14) Durch 3 Fuhrleute wird ein Schutthaufen für 87 fl. weggeschafft. A fährt mit 3 Pferden 6 Tage, B mit 2 Pferden 8 Tage und C mit 4 Pferden 6 Tage. Wie viel kommt jedem Fuhrmanne zu?

15) Drei Hammerbesitzer treten zusammen, um ein Steinkohlenbergwerk zu betreiben. A gibt dazu her 1200 Thlr., B 1460 Thlr. und C 700 Thlr. Nach Abzug aller Kosten findet sich ein reiner Ertrag von 860 Thlr. Wie viel fällt auf jeden Theilnehmer?

16) Vier Personen haben zu einer Unternehmung folgende Kapitalien hergegeben, nämlich A 500 fl. den 1. März; B 600 fl. den 1. Mai; C 450 fl. den

15. Junius und D 800 fl. den 1. August. Am Ende des laufenden Jahres hatten sie damit 1200 Thlr. gewonnen. Wie viel erhält ein Jeder?

17) Vier Fabrikanten miethen einen Platz zum Bleichen um 100 Thlr. Nun legt A 180 Ellen Leinewand in der Länge und 60 Ellen in der Breite auf, B 120 Ellen in der Länge und 50 Ellen in der Breite, C 150 Ellen in der Länge und 60 in der Breite, D 100 Ellen in der Länge und 40 Ellen in der Breite. Wie viel muß Jeder verhältnißmäßig an obigem Miethgeld zahlen?

18) Durch den Schiffer A sind 3000 Ctl. einer Waare 20 Meilen weit, durch den B 2000 Ctl. 25 Meilen weit und durch den C 1800 Ctl. 40 Meilen weit geschafft und dafür im Ganzen 800 Thaler bezahlt worden. Wie viel bekommt ein Jeder?

19) Jemand legte 2000 Thlr. in einen Handel; nach 1 Jahr trat ein Anderer mit 1800 Thlrn. bei; nach 2 Jahren trat ein Dritter mit 2600 Thlrn. bei; und endlich nach 3 Jahren ein Vierter mit 3600 Thlrn. Nachdem nun noch 3 Jahre verflossen waren, hatte man 10000 Thlr. gewonnen. Wie viel wird ein Jeder von diesem Gewinne erhalten?

20) Bei einer Gelegenheit machten 2 Hauptleute, 5 Lieutenants und 120 Gemeine eine Beute von 4000 Dukaten. Nun soll ein Hauptmann zweimal so viel als ein Lieutenant, und ein Lieutenant viermal so viel als ein Gemeiner bekommen. Wie viel Dukaten wird sonach ein jeder Hauptmann, ein jeder Lieutenant und ein jeder Gemeiner erhalten?

21) Jemand hat in seinem Testamente 3 Personen zu seinen Erben eingesetzt, und dem ersten 10000 fl., dem zweiten 8000 fl. und dem dritten

7000 fl. zugesagt. Allein in der Verlassenschaft blieb für sie nichts übrig als ein Landgut, das die Erben um 15000 fl. verkauften. Wenn nun die Erben nach dem Verhältnisse obiger Versprechungen befriedigt werden sollen: wie viel kommt dann auf jeden?

22) Unter drei Schüler soll ein Geschenk von 68 fl. nach dem Grade ihrer Würdigkeit vertheilt werden. Es verhält sich aber die Würdigkeit des A zu der des B wie 4 zu 3 und die des B zu der des C wie 2 zu 1. Wie viel kommt auf einen jeden?

23) Drei Bauernhöfe haben zur Bestreitung von Gemeindelasten 54 Thaler zu bezahlen, welche sie nach Verhältniß ihres Steuerfußes zu entrichten haben. Es verhält sich aber der Steuerfuß des Hofes A zu dem des B wie $^3/_4$ zu $^2/_3$; der des Hofes B zu dem des C wie 4 zu 5. Wie viel hat dem gemäß jeder Hof beizusteuern?

24) Die Summe von 792 fl. soll unter vier Personen so getheilt werden, daß der Antheil des A zum Antheile des B sich wie 3 zu 2; der Antheil des B zu dem des C wie 2 zu 1; und der Antheil des C zu dem des D wie 4 zu 9 verhalte. Wie viel trifft einen jeden?

## V. Vermischungs- und Alligations-Rechnung.

§. 140. Was bei Mischungen in Bezug auf Größen zu beachten ist, lehrt die **Vermischungsrechnung**. Wir betrachten hier folgende Fälle: 1) Zwei oder mehre Stoffe, deren Menge und Preis gegeben sind, werden vermischt: man sucht den Preis der Mischung. 2) Die Menge der Mischung und das Verhältniß der Stoffe sind gegeben: man sucht

die Menge der einzelnen Stoffe, die zu der verlangten Menge der ganzen Mischung zu nehmen sind.

Der erste Fall hat nicht die mindeste Schwierigkeit, wie folgende Beispiele lehren:

1) Man mischt zweierlei Sorten Tabak. Von der einen Sorte, das Pfund zu 30 Gr., werden 4 Pfund zur Mischung genommen; von der andern, von welcher das Pfund 22 Gr. kostet, 6 Pfund. Wie theuer wird 1 Pfund der Mischung sein?

Erste Sorte 4 Pfund zu 30 Gr. kosten 120 Gr.
Zweite Sorte 6 Pfund zu 22 Gr. kosten 132 Gr.

Die 10 Pfund der Mischung kosten 252 Gr.
Demnach kostet 1 Pfund der Mischung $25^1/_5$ Gr.

2) Es werden dreierlei Weine gemischt. Von der ersten Sorte, die Maaß zu 1 fl., werden 24 Maaß genommen; von der andern zu 52 Kr. 20 Maaß; von der dritten zu 36 Kr. 12 Maaß. Und weil in das Fäßchen gerade 1 Eimer oder 60 Maaß gehen, so gießt man 4 Maaß Wasser zu. Wie viel ist die Maaß dieser Mischung werth?

Die 24 Maaß Wein zu 60 Kr. betragen 1440 Kr.
die 20 = = = 52 Kr. = 1040 Kr.
die 12 = = = 36 Kr. = 432 Kr.
die 4 Maaß Wasser betragen 0 Kr.

Die 60 Maaß des gemischten Weins kosten 2912 Kr.
Folglich ist 1 Maaß desselben $48^8/_{15}$ Kr. werth.

Der zweite Fall ist mit der Gesellschafts= oder Theilungs=Rechnung ganz einerlei und nur im Gegenstande verschieden. Daher kommt die verlangte Menge oder Zahl der ganzen Mischung, zu welcher die erforderlichen Theile der einzelnen Stoffe gesucht werden sollen, in das dritte Glied der Proportion

zu stehen, in das erste die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen und in das zweite die einzelnen Verhältnißzahlen selbst. Als Probe kann angesehen werden, daß die gefundenen Zahlen das verlangte Ganze ausmachen. Ein Beispiel wird die Sache sogleich klar und deutlich machen:

Für eine gewisse Art Pulver nimmt man zu 1 Pfund Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel. Nun sollen 1000 Pfund solches Pulvers verfertigt werden. Wie viel wird man von jedem Bestandtheile nehmen müssen? — Weil 32 + 6 + 4 = 42 ist, so setzt man an:

42 : 32 = 1000 : x und x = $761^{19}/_{21}$ Pfd. Salpeter
42 : 6 = 1000 : y und y = $142^{18}/_{21}$ Pfd. Kohlen
42 : 4 = 1000 : z und z = $95^{5}/_{21}$ Pfd. Schwefel
1000 Pfd. Pulver.

Mit der Vermischungsrechnung ist wieder die sogenannte Alligationsrechnung verwandt, welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, daß in dieser das Verhältniß der Theile nicht unmittelbar gegeben ist, sondern erst gesucht werden muß. Die Alligationsrechnung hat nämlich zur Absicht, aus den gegebenen Werthen verschiedener Theile, aus denen man eine neue Mischung machen soll, für einen gegebenen Werth der neuen Mischung das Verhältniß der zu mischenden Theile zu finden. Z. B. Ein Wirth hat zweierlei Sorten Wein; von der bessern kostet die Maaß 54 Kr. und von der geringern 40 Kr. Er will eine Mischung treffen, die einen Eimer, zu 60 Maaß gerechnet, betragen und so beschaffen sein soll, daß er die Maaß für 48 Kr. geben kann. Wie viel Maaß muß er von jeder Sorte nehmen? Hier muß erst das Verhältniß der zu mischenden Theile

gesucht werden. Die Regel ist folgende: der Unterschied zwischen dem mittlern Werth und dem geringeren gibt die Verhältnißzahl der bessern Gattung; hingegen der Unterschied zwischen den bessern Werth und dem mittlern gibt die Verhältnißzahl der geringeren Gattung. Hier ist demnach 48 — 40 = 8 die Verhältnißzahl des bessern Weines, und 54 — 48 = 6 die Verhältnißzahl des geringeren Weines, und nun verfährt man wie in der Vermischungsrechnung. Nämlich weil 8 + 6 = 14; so ist
14 : 8 = 60 Maaß : x M. des bessern Weines
14 : 6 = 60 „ : y M. des geringern Weines
und man findet, daß man zu dieser Mischung $34\frac{2}{7}$ Maaß des bessern Weines, und $25\frac{5}{7}$ Maaß des geringern Weines nehmen muß.

Wenn man den Werth des bessern und geringern Weines, der zur Mischung genommen wird, addirt, so wird sich die nämliche Summe ergeben, als die ganz neue Mischung kostet.

Die Regel für das Verfahren in der Alligationsrechnung ist zwar aus der Algebra oder mathematischen Analysis genommen, wohin wir daher den wißbegierigen Rechner verweisen. Aber auch schon der denkende Geist erkennt es als recht und billig, daß hier ein umgekehrtes Verhältniß statt findet, daß nämlich die Unterschiede zwischen den Mischungsgrößen und der mittlern Größe im umgekehrten Verhältnisse mit den Werthen der zu vermischenden Dinge stehen. Denn man denke sich zwei verschiedene Weine, den einen zu 50 Kr. die Maaß, den andern zu 40 Kr. die Maaß. Wenn man diese beiden Weine zu gleichen Theilen mischt, so ist offenbar, daß die Maaß des

gemischten Weines 45 Kr. werth ist. Hingegen wenn ich die Maaß zu 48 Kr. verlange, so ist doch einleuchtend, daß jetzt bei der bessern Mischung mehr von der bessern Sorte, und weniger von der geringern zugemischt werde. Und je mehr sich der mittlere Preis dem Preise der bessern Sorte nähert, desto geringer wird der Unterschied. Eben so: je mehr ich mich im Preise von der geringern Sorte entferne, desto weniger soll von dieser zugegossen werden, und desto größer wird der Unterschied. Diese nämliche Betrachtung läßt sich aber bei allen Mischungen anstellen, und es erhellet daher die Richtigkeit, Natürlichkeit und Gerechtigkeit nach der obigen Regel: daß die Unterschiede im umgekehrten Verhältnisse mit den Werthen der zu vermischenden Dinge stehen.

Eine gute Probe dieser Rechnungsart ist es, wenn man die Preise der zu mischenden Dinge bestimmt, und dann addirt; hernach aber auch die neue Mischung nach ihrem Werthe berechnet, und vergleicht, ob gleiche Werthe oder Preise herauskommen. Z. B. Von dem Weine in obiger Aufgabe kosten die $34^2/_7$ Maaß des bessern Weines 30 fl. $51^3/_7$ Kr., und die $25^5/_7$ Maaß des geringern Weines kosten 17 fl. $8^4/_7$ Kr. Darum ist der Eimer des gemischten Weines 30 fl. $51^3/_7$ Kr. + 17 fl. $8^4/_7$ Kr. = 48 fl. werth. Nun wurde verlangt, daß die Maaß 48 Kr. kosten soll, wovon der Eimer auch 48 . 60 Kr. = 48 fl. beträgt.

§. 141. Zur eigenen Uebung in diesen Rechnungsarten mögen folgende Beispiele dienen:

1) Ein Weinhändler besitzt dreierlei Arten Wein A, B, C. Die Maaß von A kostet 9 Gr., von B 12 Gr. und von C 16 Gr. Nun nimmt er von A

10 Maaß, von B 15 Maaß und von C 5 Maaß und macht daraus eine Mischung. Wie hoch kommt die Maaß dieses gemischten Weines?

2) Wenn zu einem Pfund Harzkütte 20 Loth Pech, 10 Loth Kolophonium und 2 Loth Kreide genommen werden: wie viel ist von Jedem zu 40 Pfund nöthig?

3) Der Metzen Gerste kostet 1 fl und der Metzen Haber 40 Kr. Man will aus beiden eine Mittelsorte von Getreide machen, wovon der Metzen 48 Kr. kostet. Wie viel hat man von jeder Sorte zu nehmen?

4) Ein Goldschmidt macht ein silbernes Gefäß, nimmt hierzu 2 Mark 14löthiges, $1^1/_2$ Mark 10löthiges und $^1/_2$ Mark 12löthiges Silber, und setzt noch 1 Mark Kupfer zu. Wie viellöthig wird das Silber dieses Gefäßes sein? — 14löthiges Silber heißt dasjenige, von welchem unter 1 Mark oder 16 Lothen 14 Loth fein Silber oder reines Silber enthalten ist. Eben so verhält es sich mit 10löthigem, 12löthigem Silber u. s. w. Das Uebrige des Gewichts ist ein Beisatz z. B. von Kupfer, welches für nulllöthig gilt.

5) Aus zwei Arten Frankenwein, wovon der Eimer des bessern $40^2/_3$ fl. und der Eimer des geringern $32^1/_5$ fl. kostet, will man eine Mischung machen, wovon der Eimer 36 fl. werth sein soll. Wie viel muß von jeder Art genommen werden?

6) Jemand mischt zwei Sorten Taback und nimmt von der einen Sorte, von welcher das Pfund $2^1/_2$ Thlr. kostet, 30 Pfund und von der andern Sorte zu 20 Gr. 70 Pfund. Wie theuer kann er das Pfund dieses gemischten Tabacks ablassen?

7) Wenn 3 Mark 12löthiges Silber, 4 Mark

15löthiges und 6 Mark 10löthiges zusammen geschmolzen werden: wie viellöthig wird dieses Silber sein?

8) Jemand mischt dreierlei Weine A, B, C. Von A zu 1 Thlr. 12 Gr nimmt er 20 Maaß, von B zu 1 Thlr. 4 Gr. nimmt er 30 Maaß und von C zu 18 Gr. nimmt er 40 Maaß. Um das Fäßchen voll zu machen, gießt er noch 5 Maaß Wasser zu. Wie viel ist dieser gemischte Wein werth?

9) Es soll ein Centner Jagdpulver nach englischer Vorschrift verfertigt werden, wernach zu 100 Pfd. Salpeter 12 Pfd. Schwefel und 15 Pfd. Kohle genommen werden. Wie viel Salpeter, Schwefel und Kohle braucht man zu jenem verlangten Centner?

10) In Frankreich verhalten sich, zur Verfertigung des Pulvers, die Bestandtheile des Salpeters, des Schwefels und der Kohle, wie 24 : 5 : 3 Was wird von jedem dieser Bestandtheile zu 1000 Centnern nöthig sein?

11) Von drei einfachen Bestandtheilen, die zur Zusammensetzung einer Arznei erforderlich sind, ist das Verhältniß unter ihnen so beschaffen, daß des ersten Dosis 5 Loth, des zweiten 10 Loth und des dritten 4 Loth ist. Wie viel wird von einem jeden erfordert, um 12 medicinische Pfund oder 288 Loth zu verfertigen?

12) Zu einer andern Arznei ist das Mischungsverhältniß der vier Ingredienzien und zwar des ersten 5 Loth, des zweiten $3^1/_2$ Loth, des dritten $1^3/_4$ Loth und des vierten 2 Loth. Wie viel muß von jedem dieser Ingredienzien zur Arznei genommen werden, die 18 Loth wiegen soll?

13) Jemand hat zweierlei Sorten Kaffee; von der bessern kostet das Pfund 1 fl. 12 Kr. und von

der geringern 48 Kr. Er will eine Mischung treffen, daß er das Pfund um 54 Kr. geben kann. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

14) Jemand hat zweierlei Silber, 10löthiges und 14löthiges, und will $2^1/_2$ Mark (die Mark zu 16 Loth gerechnet) 13löthiges Silber haben. Wie viel muß er von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

15) Jemand hat 10karatiges und 17karatiges Gold; er will eine 15karatige Mischung haben, die $1^1/_2$ Mark (die Mark zu 24 Karaten gerechnet) wiegen soll. Wie viel Karate muß er von jeder Sorte nehmen?

16) Jemand verlangt von einem Weinhändler 10 Eimer Wein, den Eimer zu 25 fl. Dieser aber hat nur Weine zu 27 fl. und zu 20 fl. Wie viel von jeder dieser Sorten braucht er, wenn er diesen Wein mischen will, um jene 10 Eimer liefern zu können?

17) Ein Kaufmann will zweierlei Taback, den einen das Pfd. zu 50 Kr., den andern das Pfd. zu 36 Kr. mischen, so daß die Mischung 100 Pfd. beträgt, und das Pfd. 45 Kr. werth ist. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

18) Ein Landmann soll 20 Scheffel Getreide liefern, wovon der Scheffel 13 Gulden werth ist. Er besitzt aber nur Getreide zu $14^1/_6$ fl. und zu $12^1/_2$ fl. an Werth. Er will daher mischen. Man fragt nun, wie viel von jeder Gattung Getreide er zur Mischung nehmen darf?

19) Zu einer Metallkomposition hat man auf 2 Pfund Kupfer 36 Loth Zinn, 20 Loth Zink und 4 Loth Blei nöthig d. h. so oft 2 Pfund Kupfer genommen werden, eben so oft muß man 36 Loth

Zinn, 20 Loth Zink und 4 Loth Blei nehmen. Wie viel braucht man von jedem dieser Metalle, um 10 Centner dieser Komposition zu bekommen?

20) Jemand schmilzt $2^1/_2$ Mark 23karatiges, 1 Mark 20karatiges und $^1/_2$ Mark 18karatiges Gold zusammen. Wie vielkaratig wird das Gold in der Vermischung sein, da die Mark 24 Karate hält?

21) Es werden verschiedene Arten von Mehl A, B, C vermischt. Von A die Metze zu 2 Thlrn. 12 Gr. werden 10 Metzen genommen, von B zu 2 Thlrn. 15 Metzen und von C zu 1 Thlr. 16 Gr. 20 Metzen. Wie hoch kann man die Metze dieses gemischten Mehles geben?

22) Aus Roggen, den Metzen zu $1^5/_6$ fl., und aus Gerste den Metzen zu $1^1/_6$ fl., soll eine Mischung von 8 Scheffeln, wovon der Metzen $1^1/_3$ fl. kostet, gemacht werden. Wie viel muß von jeder Gattung genommen werden?

23) Wie viel Wasser muß man zu einem Weine gießen, von welchem die Maaß 16 Gr. gilt, um einen Eimer von 60 Maaß zu erhalten, von welchem die Maaß 12 Gr. kostet? — Ueberall, wo der geringere Stoff gar keinen Preis hat oder derselbe wenigstens nicht in Anschlag kommt, wird der Preis = 0 gesetzt.

24) Ein Goldarbeiter soll eine Silber-Arbeit liefern, die 20 Mark wiegt und 12löthig ist. Er hat gegenwärtig aber nur 15löthiges Silber vorräthig. Wie viel Kupfer muß er beimischen, um 20 Mark 12löthiges Silber zu erhalten? — Das Kupfer hat gar keinen Gehalt an Silber d. h. es ist nulllöthig.

§. 142. Wenn in der Alligations-Rechnung mehr als 2 Sachen vermischt oder verbunden werden:

so wird auf ähnliche Art verfahren. Man setze nämlich die verschiedenen Werthe oder Gehalte der Sachen, welche in die Mischung kommen sollen, der Ordnung nach vom größten bis zum kleinsten oder vom kleinsten bis zum größten unter einander und den mittlern verlangten Werth oder Gehalt seitwärts zwischen diejenigen, zwischen welche er fällt. Hierauf mache man, wie vorhin, die Unterschiede (Differenzen) von zwei Werthen oder Gehalten, und setze sie gleichfalls dahin, wohin sie umgekehrt gehören. Endlich addire man diejenigen Unterschiede, welche bei einerlei Art (Sorte) von den zu mischenden Sachen mehr als einmal stehen, und sehe sie als eine einzige Verhältnißzahl an: so wird man dadurch gleichfalls die verlangten Theile oder Verhältnißzahlen erhalten. Z. B.

1) Man will dreierlei Sorten Weine A, B und C, von welchen A 1 fl. 48 Kr. die Flasche, B 1 fl. 24 Kr., C 54 Kr. werth ist, dergestalt mischen, daß die Flasche des gemischten Weines M zu 1 fl. 12 Kr. abgegeben werden kann. Wenn man nun 70 Flaschen mischen will: wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

| | |
|---|---|
| A 108 Kr. | 18 Theile von A (aus 72 — 54) |
| B 84 „ | 18 „ „ B (deßgleichen) |
| M 72 „ | |
| C 54 „ | 12 + 36 = 48 Theile von C (aus 84 — 72 und 108 — 72) |

Und nun setzt man, da 18 + 18 + 48 = 84 ist, also an:

84 : 18 = 70 : x und x = 15 Flaschen von A
84 : 18 = 70 : y und y = 15 „ „ B
84 : 48 = 70 : z und z = 40 „ „ C

2) Ein Kaufmann hat viererlei Sorten Taback

A, B, C und D. Davon kostet die Sorte A 48 Kr., B. 1 fl., C 1 fl. 30 Kr. und D 1 fl. 36 Kr. Er will ihn so mischen, daß er das Pfund um 1 fl. 24 Kr. geben kann. Wie viel muß von jeder Sorte zu einer Mischung von 1 Centner 56 Pfunden genommen werden?

Wir setzen, wie vorhin, an:

| | |
|---|---|
| A 48 | 12 (aus 96 — 84) |
| B 60 | 6 (aus 90 — 84) |
| M 84 | |
| C 90 | 24 (aus 84 — 60) |
| D 96 | 36 (aus 84 — 48) |

78 die Summe aller Verhältnißzahlen,

und fahren also fort:

78 : 12 = 156 : w und w = 24 Pfd. von A
78 : 6 = 156 : x und x = 12 „ „ B
78 : 24 = 156 : y und y = 48 „ „ C
78 : 36 = 156 : z und z = 72 „ „ D

156 Pfd.

3) Wenn man aber aus den nämlichen Sorten (Nr. 2) einen Taback zusammenmischen will, wovon das Pfund nur 54 Kr. kosten soll: wie groß werden die einzelnen Mischungstheile für ein Gewicht von 2 Centner 4 Pfund Mischung ausfallen?

| | |
|---|---|
| A 48 | 42 + 36 + 6 = 84 |
| M 54 | |
| B 60 | 6 |
| C 90 | 6 |
| D 96 | 6 und 84 + 6 + 6 + 6 = |

102 die Summe aller Verhältnißtheile. Und man wird finden, daß zur Mischung von 2 Centnern

4 Pfund die Sorte A 168 Pfd., B 12 Pfd., C 12 Pfd. und D 12 Pfd. hergibt.

§. 143. Eben so können folgende Beispiele berechnet werden:

1) Ein Landwirth hat drei Arten Getreide, von welchen der bayerische Metzen der ersten Art 9 fl., der der zweiten Art 18 fl. und der der dritten Art 20 fl. kostet. Er will dieselben so mischen, daß der Metzen zu 12 fl. zu stehen kommt. Was für Verhältnißtheile werden sich herausstellen? und wie viel wird jede Sorte zur Mischung von 6 Metzen beitragen?

2) Aus drei Sorten Mehl zu 20 Kr., 15 Kr. und 14 Kr. ist eine mittlere zu 18 Kr. zu mischen. Nach welchem Verhältniß sind die Theile zu nehmen?

3) Jemand will 10löthiges Silber aus 7löthigem, 9löthigem, 11löthigem und 13löthigem schmelzen. Wie viel braucht er von jeder Art?

4) Verschiedene Arten von Mehl, die Maaß zu 4 Groschen, zu 8 Groschen, zu 16 Groschen und zu 17 Groschen, sollen so gemischt werden, daß man die Maaß um 15 Groschen geben kann. Was ist zu thun?

5) Vier Arten Wein, den Eimer zu 50, 61, 72 und 83 fl., sollen dergestalt gemischt werden, daß der Eimer 75 fl. kostet. Wie viel muß dazu von jeder Art genommen werden?

6) Man hat 8löthiges, 9löthiges, 11löthiges, 12löthiges und 15löthiges Silber, welches man so mischen will, daß es 14löthig werde. Man suche die Verhältnißzahlen sämmtlicher Sorten.

## Sechstes Kapitel.

### Von der Ausziehung der Quadrat- und Kubik-Wurzel.

§. 144. Ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren heißt eine Quadratzahl oder ein Quadrat; und zwar das Quadrat derjenigen Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt das Quadrat gibt. Z. B. $5 \times 5 = 25$ ist das Quadrat der Zahl 5. Eben so ist 64 das Quadrat von 8, weil $8 \times 8 = 64$. Der einzelne Faktor, durch dessen Multiplikation mit sich selbst das Quadrat entsteht, heißt die Quadratwurzel; daher ist 5 die Quadratwurzel von 25; eben so 8 die Quadratwurzel von 64; ferner 6 die Quadratwurzel von 36.

§. 145. Es hat also gar keine Schwierigkeit, das Quadrat von jedweder Zahl anzugeben; denn man darf sie nur mit sich selbst multipliciren. Z. B. von 12 ist das Quadrat $12 \times 12 = 144$; von 217 ist das Quadrat $217 \times 217 = 47089$. Um anzugeben, daß eine Zahl zum Quadrat zu erheben sei, gebraucht man die Zahl 2, welche man oben zur Rechten der Zahl setzt. Z. B. $12^2 = 144$ heißt: das Quadrat von 12 ist 144. Ferner $9^2 = 81$ bedeutet: das Quadrat von 9 ist 81.

§. 146. Von Brüchen erhält man das Quadrat, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt (wegen §. 54). Gemischte Zahlen verwandelt man zuerst in einen uneigentlichen Bruch nach §. 51. Beispiele:

$$(3/4)^2 = \frac{3 \times 3}{4 \times 4} = 9/16$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1 \times 1}{7 \times 7} = \frac{1}{49}$$

$$\left(\frac{8}{13}\right)^2 = \frac{8 \times 8}{13 \times 13} = \frac{64}{169}$$

$$\left(2\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{14}{5}\right) = \frac{14 \times 14}{5 \times 5} = \frac{196}{25}.$$

§. 147. Wenn man Decimalbrüche zum Quadrate erhebt, so erscheinen die Decimalstellen im Quadrate allemal paarweise, weil sie die doppelte Anzahl der Stellen in der Quadratwurzel enthalten müssen. Z. B.

$(0,4)^2 = 0,4 \times 0,4 = 0,16$
$(0,05)^2 = 0,05 \times 0,05 = 0,0025$
$(0,126)^2 = 0,126 \times 0,126 = 0,015876$
$(0,032)^2 = 0,001024.$

§. 148. Aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen heißt diejenige Zahl finden, welche mit sich selbst multiplicirt die gegebene Zahl (Quadratzahl) wieder gibt. Um diese Verrichtung anzuzeigen, gebraucht man das Zeichen $\sqrt[2]{\phantom{x}}$ oder einfach $\sqrt{\phantom{x}}$. So bedeutet $\sqrt{64}$ soviel als: die Quadratwurzel aus 64; und $\sqrt{64} = 8$ heißt: die Quadratwurzel aus 64 ist 8.

§. 149. Um aus jeder Zahl die Quadratwurzel ziehen zu können, muß man sich zuvor mit den Quadratzahlen der neun ersten Zahlen bekannt machen, welche in folgendem Täfelchen enthalten sind:

| Quadrat-Wurzeln | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadrate | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |

§. 150. **Aufgabe.** Aus einer jeden ganzen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

**Auflösung.** 1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen, und gebe jeder Klasse zwei Ziffern, wo dann die letzte Klasse zur Linken, d. i. die höchste, zwei oder auch nur eine Ziffer haben kann und darf.

2) Nun ziehe man von der höchsten Klasse das ihr gleiche oder zunächst kleinere Quadrat eines der neun ersten Zahlziffern in obigem Täfelchen ab, und schreibe die Wurzel davon beiseite in die sonst gewöhnliche Stelle des Quotienten.

3) Zum etwaigen Reste setze man die nächste Klasse herab, verdoppele den eben gefundenen Wurzeltheil, setze die niedrigste Ziffer davon unter die höchste der eben herabgelassenen Klasse, und dividire. Den sich ergebenden Quotienten setze man als den zweiten Wurzeltheil sowohl rechts neben den ersten Wurzeltheil, als auch neben den Divisor hin.

4) Den Divisor sammt dem beigesetzten zweiten Wurzeltheile (die man immer einschließen kann, um sie leicht von der darüberstehenden Zahl unterscheiden zu können), multiplicire man mit dem so eben gefundenen Quotienten, als dem neuen Wurzeltheil, und ziehe das Produkt von den treffenden Zifferstellen, nämlich von dem vorigen Reste und der herabgelassenen Klasse, ab.

5) Jetzo nehme man die nächste Klasse herab und setze sie zu dem etwa gebliebenen Reste, verdoppele die schon gefundenen Wurzeltheile, die man zusammen als eine Zahl betrachtet, und verfahre wieder, wie so eben (in Nro. 3 und 4) ist gelehrt wor-

den, bis alle Klassen herabgesetzt und somit alle Wurzeltheile gefunden worden sind.

6) So oft man mit dem Zweifachen der Wurzeltheile nicht dividiren kann, indem der Divisor größer ist als der Dividend, schreibe man eine Null als den gesuchten Wurzeltheil an, setze die nächste Klasse herunter und verfahre wieder, wie schon gezeigt worden ist.

7) Wenn einmal das (nach Nro. 4) gefundene Produkt so groß sein sollte, daß man nicht abziehen kann, so muß der Quotient oder Wurzeltheil kleiner genommen werden, so daß der Abzug geschehen kann.

8) Die Wurzel erhält allemal so viele Zifferstellen, als die Zahl, woraus man die Quadratwurzel zieht, Klassen hat. Beispiele: Man soll die Quadratwurzel aus 214369 und aus 2274064 ziehen.

21|43|69(463
16|
———
543
(86)
516
———
2769
(928)
2769
———
*

2|27|40|64(1508
1|
———
127
(25)
125
———
240
(300)
000
———
24064
(3008)
24064
———
*

Man findet also $\sqrt{214369} = 463$ und $\sqrt{2274064} = 1508$.

Noch zwei andere Beispiele sind:

```
36|96|64(608
36|
-----
   96
 (120)
  000
  -----
   9664
  (1208)
   9664
  -----
     *
```

```
4|02|00|25(2005
4|
-----
 02
(40)
 00
-----
  200
 (400)
  000
  -----
   20025
   (4005)
   20025
   -----
     *
```

§. 151. Solche Zahlen, aus welchen die Quadratwurzel so gezogen werden kann, daß am Ende kein Rest bleibt, sind *vollständige Quadratzahlen*. Aber die wenigsten Zahlen sind von dieser Art. Bei den meisten bleibt ein Rest, und man kann für solche Zahlen die Wurzel nie vollständig, sondern nur durch Näherung finden, jedoch so genau, als es nur immer nöthig ist in der Anwendung. Dergleichen Quadratzahlen nennt man *unvollständige, unvollkommene Quadratzahlen*, und ihre Wurzeln heißen *Irrationalzahlen* d. h. solche Zahlen, die weder durch ganze noch durch gebrochene Zahlen vollständig dargestellt werden können. Das Verfahren, aus unvollständigen Quadratzahlen die Wurzel zu ziehen, unterliegt aber keinen neuen Regeln. Man braucht blos an den letzten Rest nach und nach so viele Paare von Nullen zu hängen, als man in der Wurzel Decimalstellen verlangt, und verfährt übrigens wie vorhin. Für jedes Paar angehängte Nullen wird dann in der Wurzel Eine Decimalstelle abgeschnitten; oder so viele Paare von Nullen man angehängt hat,

so viele Decimalstellen werden in der gefundenen Wurzel abgeschnitten (§. 147). Z. B. man soll die Quadratwurzel aus 236 ziehen. Die Rechnung sieht also aus:

```
2|36(15,36 ....            19100
1|                         (3066)
-----                      18396
  136                      -----
  (25)                       704
  125
  -----
   1100
   (303)
    909
   -----
```

An den letzten Rest 11 wurde zuerst ein Paar Nullen angehängt; dann an den neuen Rest 191 abermals ein Paar Nullen. Für diese zwei Paare von Nullen sind in der Wurzel zwei Decimalstellen abgeschnitten worden. Von 15 ist das Quadrat erst 225; also noch ziemlich geringer als die vorgelegte Zahl 236. Hingegen das Quadrat von 15,36 ist schon 235,9296; also gar wenig von 236 verschieden. Je weiter man aber die Wurzelziehung fortsetzt, desto genauer findet man die Wurzel selbst. — Auf gleiche Weise findet man

$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots.$

$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots.$

§. 152. Die Probe besteht begreiflich darin, daß man die gefundene Wurzel mit sich selbst multiplicirt. Das Produkt muß die nämliche Zahl wiedergeben, aus der die Wurzel gezogen worden ist. Wenn am Ende ein Rest geblieben ist, so muß man diesen zu dem Produkte noch addiren, um die Quadratzahl wieder zu erhalten. Die bisherigen Beispiele können zur Uebung dienen.

§. 153. Man übe sich in der Ausziehung der Quadratwurzeln an folgenden Beispielen.

1) $\sqrt{19704721}$ gibt
2) $\sqrt{73034116}$
3) $\sqrt{104734756}$
4) $\sqrt{14408161156}$
5) $\sqrt{81144370272289}$
6) $\sqrt{2601032436101124}$
7) $\sqrt{7}$
8) $\sqrt{45}$
9) $\sqrt{280}$
10) $\sqrt{638}$
11) $\sqrt{4122}$
12) $\sqrt{27071260}$.

§. 154. Aufg. Aus einem Decimalbruche, ohne Ganze und mit Ganzen, die Quadratwurzel auszuziehen.

Aufl. Das Verfahren ist das nämliche wie bei ganzen Zahlen; nur muß man (wegen §. 147) darauf sehen, daß der Decimalbruch eine gerade Anzahl von Stellen z. B. 2, 4, 6, 8, 10 Stellen u. s. w. habe. Ist die Anzahl ungerade, so mache man sie durch eine angehängte Null gerade.

Kommen im Decimalbruche keine Ganzen vor, so erhält natürlich die Wurzel auch keine Ganzen, und alle gefundenen Ziffern sind Decimalen, und zwar soviele, als Paare oder Klassen von Decimalen in dem vorgelegten Decimalbruche vorhanden sind.

Hat aber der Decimalbruch zugleich auch Ganze, so bekommt die Wurzel so viele Ganze als die gegebene Zahl Klassen von Ganzen hat, und so viele Decimalen, als Klassen von Decimalen in der vorgelegten Zahl sich vorfinden. Z. B. Man soll die Quadratwurzel von 0,0064 angeben.

```
0,00|64(0,08
     64
  ---------
      *
```

Welches ist die Quadratwurzel aus 0,013924?

```
0,01|39|24(0,118
   1|
 ----------
    39
   (21)
    21
   --------
    1824
    (228)
    1824
   --------
      *
```

Welches ist die Quadratwurzel aus 61,238? — In den beiden vorigen Beispielen war die Anzahl der Decimalen gerade, nämlich in dem ersten 4, in dem zweiten 6. In diesem Beispiele aber ist die Anzahl ungerade, nämlich 3; deßhalb muß noch eine Null beigefügt und daher die Wurzel aus 61,2380 gezogen werden also:

```
61,|23|80(7,82.....
 49|
 ---------
 1223
  (148)
 1184
 ----------
   3980
  (1562)
   3124
  ----------
    856
```

Es ist also $\sqrt{61,238} = 7,82\ldots.$ Und da ein Rest geblieben ist, so könnte man auch die Rechnung fortsetzen, nach §. 151. Alsdann würde die Wurzel noch genauer gefunden werden, als es gegenwärtig geschehen ist.

§. 155. Aus folgenden Decimalbrüchen, ohne und mit Ganzen, suche man die Quadratwurzel.

1) $\sqrt{0,038416}$
2) $\sqrt{17,5}$
3) $\sqrt{0,000025}$
4) $\sqrt{256,3}$
5) $\sqrt{3303,9504}$
6) $\sqrt{9,6}$
7) $\sqrt{120583,3195061881}$
8) $\sqrt{0,0000120583319506188 1}$.

§. 156. Aufg. Aus einem gemeinen Bruche oder einer gemischten Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Aufl. So wie das Quadrat eines gemeinen Bruches gefunden wird, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt (§. 146.): eben so muß umgekehrt beim Ziehen der Wurzel sowohl aus Zähler als auch aus Nenner die Wurzel besonders gezogen werden. Gemischte Zahlen verwandelt man erst in einen uneigentlichen Bruch (nach §. 51). Z. B.

$$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$$

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{\frac{144}{289}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{289}} = \frac{12}{17}$$

$$\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Indessen läßt sich dieses Verfahren nur da mit Bequemlichkeit anwenden, wo Zähler und Nenner vollständige Quadratzahlen sind. Sobald dieß nun der Fall nicht ist, verwandelt man besser den gemeinen

Bruch in einen Decimalbruch, und verfährt nach dem Vorhergehenden (§. 154). Z. B.

$\sqrt{5/_{12}} = \sqrt{0,416666\ldots} = 0,645\ldots$

$\sqrt{3/_{16}} = \sqrt{0,1875} = 0,43\ldots = 0,4330\ldots$

§. 157. Man ziehe aus folgenden Brüchen die Quadratwurzel dergestalt, daß man sie zuvor in Decimalbrüche verwandelt:

1) $\sqrt{3/_7}$
2) $\sqrt{19/_{64}}$
3) $\sqrt{75/_{238}}$
4) $\sqrt{5^2/_3}$
5) $\sqrt{7^5/_9}$
6) $\sqrt{122^3/_8}$.

§. 158. Ein Produkt aus drei gleichen Faktoren heißt eine Kubikzahl oder ein Kubus; und der einfache Faktor davon heißt die Kubikwurzel. So ist demnach 64 der Kubus von 4, weil $4 \times 4 \times 4 = 64$; und 4 ist die Kubikwurzel von 64.

Den Kubus oder die Kubikzahl bezeichnet man durch die Zahl 3, die man oben rechts neben der Zahl, die im Kubus stehen soll, schreibt. Z. B. $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ heißt: der Kubus von 5 ist 125. Eben so

$12^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$
$68^3 = 314432$
$131^3 = 2248091$.

Das Zeichen für die Kubikwurzel ist $\sqrt[3]{\ }$. Nämlich $\sqrt[3]{729} = 9$ heißt: die Kubikwurzel aus 729 ist 9; ferner $\sqrt[3]{46656} = 36$ liest man: die Kubikwurzel aus 46656 ist 36.

§. 159. Von gemeinen Brüchen erhält man auf gleiche Weise die Kubikzahlen. Z. B.

$$(^2/_5)^3 = \frac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = {}^8/_{125}$$

$$(^4/_7)^3 = \frac{4 \times 4 \times 4}{7 \times 7 \times 7} = {}^{64}/_{343}$$

$$(^1/_8)^3 = \frac{1 \times 1 \times 1}{8 \times 8 \times 8} = {}^1/_{512}$$

Gemischte Zahlen müssen zuvor in einen uneigentlichen Bruch (nach §. 51) verwandelt werden, z. B.

$$(6^3/_4)^3 = (^{27}/_4)^3 = \frac{27 \times 27 \times 27}{4 \times 4 \times 4} = \frac{19683}{64}.$$

§. 160. Die Decimalbrüche enthalten im Kubus eben so viele Klassen von drei und drei Decimalstellen, als in der Wurzel einfache Decimalstellen vorhanden sind. Z. B.

$(0{,}7)^3 = 0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}343$

$(0{,}02)^3 = 0{,}02 \times 0{,}02 \times 0{,}02 = 0{,}000008$

$(0{,}014)^3 = 0{,}000002744.$

§. 161. Aus einer gegebenen Zahl die Kubikwurzel ziehen heißt diejenige Zahl finden, welche dreimal mit sich selbst multiplicirt d. h. dreimal als Faktor im Produkte gesetzt die gegebene Zahl wieder gibt.

§. 162. Zur Kenntniß der Kubikwurzelziehung muß man die Kubusse der neun ersten Zahlen wissen, welche in folgendem Täfelchen enthalten sind:

| Wurzeln | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kubusse | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

§. 163. Aufg. Aus jeder gegebenen ganzen Zahl die Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl. 1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von drei Ziffern, wobei die letzte zur Linken oder die höchste drei, oder zwei, oder auch nur Eine Ziffer erhalten kann.

2) Von der höchsten oder letzten Klasse zur Linken ziehe man denjenigen Kubus aus den neun ersten Zahlen in obigem Täfelchen ab, welcher ihr gleich oder zunächst kleiner ist, und schreibe die Wurzel davon an die gewöhnliche Stelle des Quotienten. Der Rest des Abzugs aber, wenn einer bleibt, wird gerade unter die höchste Klasse gesetzt.

3) Zu dem etwaigen Reste setze man die nächste Klasse herab; erhebe die bereits gefundene Wurzel zum Quadrat, und multiplicire dieses durch die Zahl 3. Unter den vorigen Rest und die neue herabgelassene Klasse setze man dieses dreifache Quadrat so, daß seine niedrigste Ziffer unter der höchsten Ziffer der neuen Klasse zu stehen komme, und dividire damit in die darüberstehenden Zahlen. Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel. Den Divisor kann man zur leichten Unterscheidung einschließen.

4) Nun mache man folgende drei Produkte:

a) Man multiplicire mit diesem neuen Theile der Wurzel den so eben gebrauchten Divisor, und schreibe dieses Produkt gerade so unter, wie den Divisor, nämlich die niedrigste Ziffer unter die höchste der herabgelassenen Klasse;

b) man multiplicire den dreifachen ersten Wurzeltheil mit dem Quadrate des neuen oder zweiten Wurzeltheiles, und setze dieses Produkt so unter, daß die niedrigste Ziffer unter die mittlere der herabgelassenen Klasse zu stehen kommt; endlich

c) mache man den Kubus des zweiten Wurzeltheils, dessen niedrigste Ziffer unter die niedrigste der herabgelassenen Klasse gesetzt wird.

5) Jetzt addire man die nach Nro. 4 gefundenen

drei Produkte a, b und c, und ziehe die Summe von dem Reste und der herabgelassenen Klasse ab.

6) Auf die nämliche Weise verfahre man, wenn noch mehr Klassen vorhanden sind. Nämlich man setze zu dem etwaigen Reste die folgende Klasse herab, und betrachte die bisher gefundenen Wurzeltheile immer als Einen, und setze die Rechnung weiter so fort, wie von Nro. 3 an ist gelehret worden, und zwar so lange, bis alle Klassen herabgelassen worden sind.

7) So oft der Divisor größer ist als der Dividend, und man also nicht dividiren kann, so oft muß in der Wurzel eine Null als Quotient angeschrieben, eine neue Klasse herabgesetzt, und ein neuer Divisor gesucht werden.

8) Wenn man die nach Nro. 5 gefundene Summe nicht abziehen kann, so ist dieß ein Zeichen, daß der Quotient oder neue Wurzeltheil zu groß genommen worden ist. Er muß daher vermindert werden, bis der Abzug geschehen kann.

9) Die Wurzel erhält immer so viele Zifferstellen, als die Kubikzahl Klassen hat.

Beispiele: Man soll die Kubikwurzel aus 34645976 und aus 128024064 ziehen.

```
34|645|976(326          128|024|064(504
27|   |                 125|   |
----------              ----------
  7645                     3024
 (27)                      (75)
  54                    ----------
   36                      3024064
    8                      (7500)
----------                 30000
 5768                        2400
----------                      64
 1877976                ----------
 (3072)                    3024064
 18432                  ----------
   3456                       *
    216
----------
 1877976
----------
    *
```

Es ist also $\sqrt[3]{34645976} = 326$ und $\sqrt[3]{128024064} = 504$.

§. 164. Bei Zahlen, welche keine vollständigen Kubikzahlen sind, bleibt am Ende ein Rest, und die gefundene Wurzel ist deßhalb auch nicht ganz genau. Will man sie genauer haben, so darf man nur an den letzten Rest eine Klasse von drei Nullen anhängen, und die Rechnung auf obige Weise fortsetzen, so lange, als man es für nöthig findet. Für jede angehängte Klasse von Nullen wird in der Wurzel Eine Decimalstelle angeschrieben oder abgeschnitten. Z. B. Man soll die Kubikwurzel aus 3 ziehen; die Rechnung geschieht also:

```
3(1,442....
1
―――――――――
2000
(3)
12
 48
  64
―――――――――
1744
―――――――――
 256000
 (588)
 2352
   672
     64
―――――――――
 241984
――――――――――
   14016000
   (62208)
   124416
       1728
          8
――――――――――
   12458888
――――――――――
    1557112
```

Demnach ist $\sqrt[3]{3} = 1{,}442.....$

§. 165. Die Probe wird dadurch gemacht, daß man die gefundene Wurzel zum Kubus erhebt, und man muß die Zahl wieder erhalten, aus welcher die Kubikwurzel gezogen worden ist. Wo am Ende ein Rest geblieben ist, da muß man diesen noch zum gefundenen Kubus addiren. So muß also in dem letzten Beispiele zum Kubus von 1,442.... noch der Rest 1557112 addirt werden, um gerade die Zahl 3 wieder zu erhalten.

§. 166. Man ziehe aus folgenden Zahlen die Kubikwurzel:

1) $\sqrt[3]{438976}$ gibt
2) $\sqrt[3]{29218112}$
3) $\sqrt[3]{997002999}$
4) $\sqrt[3]{128100283921}$
5) $\sqrt[3]{496981290961}$
6) $\sqrt[3]{28096127520832216}$
7) $\sqrt[3]{6}$
8) $\sqrt[3]{18}$
9) $\sqrt[3]{317}$
10) $\sqrt[3]{8912}$
11) $\sqrt[3]{23456}$
12) $\sqrt[3]{240736}$.

§. 167. Aufg. Aus einem Decimalbruche, ohne Ganze oder mit Ganzen, die Kubikwurzel zu ziehen.

Aufl. Man verfährt ganz so, wie bei der Ausziehung der Wurzel aus ganzen Zahlen. Nur hat man vor Allem darauf zu sehen, daß die Decimalstellen Klassen von drei zu drei Stellen bilden (wegen §. 160). Wo dieß der Fall noch nicht ist, da muß

man die Stellen durch angehängte Nullen am Ende ergänzen. Die Wurzel erhält so viele einzelne Ganze und Decimalen, als in der vorgelegten Kubikzahl Klassen von beiden vorhanden sind. Z. B. Wenn man die Kubikwurzel aus 14,8 ziehen soll, so muß man erst noch zwei Nullen anhängen; dann erhält man in der Wurzel Eine Decimalstelle; und will man zwei Stellen haben, so muß man noch eine neue Klasse von Nullen d. i. noch drei Nullen anhängen.

```
14,|800(2,45 ....
 8 |
-------
 6800
(12)
 48
  96
   64
-------
 5824
-------
  976000
 (1728)
  8640
   1800
     125
--------
  882125
--------
   93875
```

```
0,|000|314|432(0,068
         216
     ---------
        98432
       (108)
        864
        1152
           512
       -------
        98432
       -------
          *
```

Demnach ist

$$\sqrt[3]{0,000314432} = 0,068$$

§. 168. Man ziehe nun noch aus folgenden Decimalbrüchen, mit und ohne Ganze, die Kubikwurzel, nämlich

1) $\sqrt[3]{12,167}$
2) $\sqrt[3]{3,45}$
3) $\sqrt[3]{1771,561}$
4) $\sqrt[3]{64,969656240601}$

5) $\sqrt[3]{0,003148}$
6) $\sqrt[3]{0,00741}$
7) $\sqrt[3]{0,4163255}$
8) $\sqrt[3]{0,2584}$.

§. 169. Aufg. Aus einem gemeinen Bruche oder einer gemischten Zahl die Kubikwurzel auszuziehen.

Aufl. Man ziehe aus Zähler und Nenner die Wurzel besonders (wegen §. 159.). Aber gemischte Zahlen müssen zuvor in uneigentliche Brüche verwandelt werden (§. 51). Z. B.

1) $$\sqrt[3]{\frac{125}{729}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{5}{9}$$

2) $$\sqrt[3]{\frac{512}{4913}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{4913}} = \frac{8}{17}$$

3) $$\sqrt[3]{11\frac{25}{64}} = \sqrt[3]{\frac{729}{64}} = \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{9}{4} = 2^1/_4.$$

Aber nur höchst selten ereignet es sich, daß Zähler und Nenner vollständige Kubikzahlen sind. Im entgegengesetzten Falle thut man wohl allemal besser, den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, und nach §. 167 zu verfahren. Z. B.

$$\sqrt[3]{^7/_9} = \sqrt[3]{0,777777\ldots} = 0,91964\ldots$$
$$\sqrt[3]{^2/_3} = \sqrt[3]{0,666666666\ldots} = 0,87358\ldots$$
$$\sqrt[3]{^3/_4} = \sqrt[3]{0,75} = 0,90856\ldots$$
$$\sqrt[3]{^5/_8} = \sqrt[3]{0,625} = 0,85498\ldots$$
$$\sqrt[3]{4^3/_8} = \sqrt[3]{4,375} = 1,6355\ldots$$
$$\sqrt[3]{28^3/_5} = \sqrt[3]{28,6} = 3,0581\ldots$$

§. 170. Anmerkung. Die Gründe für das Verfahren bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel sind hier weggelassen worden, weil dieselben ohne Kenntniß der Buchstabenrechnung nur sehr weitläuftig und doch nicht deutlich genug vorgetragen werden können. Könnte der Lehrer den Zöglingen nur soviel begreiflich machen, daß $(a + b) \times (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, und daß $(a + b) \times (a + b) \times (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sei: so wäre wenigstens der Schlüssel zur Einsicht der Regel für die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel gegeben. Darum lasse sich der wißbegierige Liebhaber der Rechenkunst begeistern, wenigstens noch einige Schritte über diese Anweisung hinaus auf das Feld der Buchstabenrechnung zu thun. Selbst der künftige Kaufmann wird sich für diese kleine Mühe reichlich belohnet finden!

## Siebentes Kapitel.

### Vermischte Aufgaben,

### welche das Nachdenken der jungen Freunde der Rechenkunst besonders in Anspruch nehmen.

1) In das hinterlassene Vermögen eines Vaters theilen sich 6 Kinder so, daß das ältere immer 25 Gulden weniger bekommt als das nächst jüngere. Das Vermögen beträgt 12525 fl. Wie viel erhält jedes Kind von dem ältesten an bis zum jüngsten?

2) Ein Meister, 12 Gesellen und 4 Handlanger haben für eine gewisse Zeit, die sie arbeiteten, der Meister täglich 1 Thaler, der Geselle 16 Groschen und der Handlanger 10 Groschen, überhaupt aber

170 Thaler 16 Groschen ausbezahlt erhalten. Wie viel Tage haben sie dafür gearbeitet?

3) Ein Fleischer verdingt 16 Ochsen auf 12 Monate Zeit in die Fütterung. Nach 3 Monaten schickt er noch 8 Ochsen, und, nachdem diese wiederum $3^1/_3$ Monate gezehrt haben, noch 6 Ochsen. Wie lange werden sämmtliche Ochsen für das nämliche bedungene Geld gefüttert werden müssen?

4) In wie viel Tagen können 3 Personen zusammen eine Arbeit vollenden, wozu die erste allein 24 Tage, die zweite 21 Tage und die dritte 18 Tage brauchen würde?

5) Eine Arbeit wird durch 6 Mann in 50 Tagen fertig. Nach 13 Tagen kommen noch 4 Mann dazu, und diese 10 Mann arbeiten zusammen 5 Tage; dann kommen noch 8 Mann dazu. Wie lange müssen diese 18 Mann zusammen noch arbeiten?

6) Einem Boten, der schon vor 13 Tagen abgegangen ist und täglich 5 Meilen zurück legt, wird aus dem nämlichen Orte ein zweiter nachgesandt, der täglich 9 Meilen machen muß. In wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

7) Aus einem gewissen Orte wird ein Eilbote abgeschickt, der alle 5 Stunden 7 Meilen macht. 8 Stunden nach seiner Abreise wird ihm ein anderer nachgeschickt, welcher, um jenen einzuholen, alle 3 Stunden 5 Meilen machen muß. In wie viel Stunden wird er ihn einholen?

8) Aus einem Orte A zieht ein Heerhaufen geraden Weges nach einem andern Orte B, und macht täglich $4^1/_3$ Meilen. Aus dem Orte B zieht 12 Tage darauf ein anderer Heerhaufen geraden Weges nach dem Orte A, und macht täglich 5 Meilen. Beide

Oerter liegen 120 Meilen weit von einander. Es ist daher die Frage: den wie vielsten Tag nach dem Ausrücken des ersten Heerhaufens beide Heerhaufen zusammen treffen werden?

9) In ein Wasserbehältniß, welches 40 Maaß faßt, laufen 4 Röhren. Die erste füllt, wenn sie allein läuft, das Behältniß in 15 Minuten; die zweite in 30 Minuten; die dritte in 45 Minuten, und die vierte in 1 Stunde, unter gleicher Voraussetzung, daß sie allein laufen. In welcher Zeit wird das Behältniß gefüllt werden, wenn man alle 4 Röhren zugleich laufen läßt?

10) Vater und Sohn sind mit einander 54 Jahre alt; Enkel und Großvater 85 Jahre; Vater und Großvater 109 Jahre. Wie alt ist ein Jeder?

11) In 2 Geldbeuteln befinden sich zusammen 200 Gulden. Wenn man aus dem ersten 20 Gulden heraus nimmt und legt sie in den zweiten, so ist in beiden gleichviel. Wie viel enthält ein jeder?

12) In einem Lande sollen 4 Kreise A, B, C und D zu einem bevorstehenden Kriege ihre Mannschaft von 6000 Mann stellen. Die Vertheilung soll nach dem Verhältnisse ihrer Volksmenge geschehen. Nun verhält sich die Volksmenge von A zur Volksmenge von B, wie 5 zu 6; die Volksmenge von B zur Volksmenge von C, wie 9 zu 8; die Volksmenge von C zur Volksmenge von D, wie 14 zu 15. Es ist daher die Frage: wie viel Mann jeder Kreis zu stellen hat?

13) In eine Verlassenschaft haben sich 6 Erben getheilt. A hat nach Verhältniß $^1/_4$, B $^1/_5$, C $^1/_6$, D $^1/_7$, E $^1/_8$ und F 200 Gulden davon erhalten. Man fragt: 1) wie viel jeder der fünf ersten Erben be-

kommen hat, und 2) wie groß die ganze Erbschaft gewesen ist?

14) Zu einem gewissen Unternehmen traten 4 Personen zusammen, und legten verschiedene Kapitalien ein, dergestalt, daß sie unter sich einig wurden, den Gewinn oder Verlust nach dem Verhältniß ihrer Einlagen zu vertheilen. Daraus ergab sich, daß A noch einmal so viel als B, und C so viel als A und B mit einander; D aber um die Hälfte mehr als B gewinnen oder verlieren soll. Sie hatten nun einen Verlust von 1200 fl. Was verliert demnach ein Jeder?

15) Ein Dienstbote erhält zum jährlichen Lohne 24 Thaler und ein Kleid. Nach 3 Monaten tritt derselbe aus dem Dienste, und erhält für diese Dienstzeit das Kleid zum Lohne. Wie hoch ist nun dieses Kleid angerechnet?

16) Jemand kauft ein Stück Leinwand, immer 5 Ellen um 2 fl. 36 Kr. und verkauft solche wieder, indem er 7 Ellen um 4 fl. 42 Kr. gibt. Dabei gewinnt er 10 fl. 36 Kr. Wie viele Ellen hielt das Stück?

17) Jemand hat in 4 Terminen folgende Zahlungen und zwar ohne Zinsen zu leisten, nämlich 1500 fl. nach 2 Monaten, 2000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten und 3500 fl. nach 17 Monaten. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe auf einmal zu erhalten. Wann soll die Zahlung geschehen, damit weder der Gläubiger noch der Schuldner dabei Schaden leide?

18) Jemand hat in seiner Börse so viel Geld, daß $^1/_3$, $^1/_4$ und $^1/_6$ davon zusammen 10 Thaler ausmachen. Wie viel hat er im Ganzen?

19) Ein Behälter wird durch eine Röhre in 30 Minuten gefüllt, und durch eine andere in 45 Minuten ausgeleert. Wenn nun der Behälter ganz leer ist und beide Röhren geöffnet werden: in wie viel Minuten wird derselbe voll sein?

20) Ein Hund verfolgt einen Fuchs, der jenem um 100 Sprünge voraus ist. So oft der Fuchs 9 Sprünge macht, thut der Hund deren 6; aber 3 Sprünge des Hundes machen 7 Sprünge des Fuchses aus. Wie viel Sprünge muß nun der Hund machen, bis er den Fuchs einholt?

21) Ein Mann trinkt mit seiner Frau in 14 Tagen ein Fäßchen Bier. Der Mann fand, daß, als seine Frau auf einige Zeit verreiset war, er es allein in 22 Tagen austrank. In welcher Zeit wird es die Frau allein austrinken?

22) In einer Stadt liegen 1675 Mann, theils Fußgänger theils Reiter, in Garnison, von welchen der Fußgänger monatlich 3 Gulden, der Reiter 4 Gulden Löhnung erhält. Da nun der monatliche Sold für die ganze Garnison 5500 fl. ausmacht, so ist die Frage: aus wie viel Mann Fußgänger und Reiter dieselbe besteht?

23) In wie viel Tagen können drei Personen zusammen eine Arbeit zu Stande bringen, an welcher die erste allein 15 Tage, die zweite allein 12 Tage, und die dritte allein 10 Tage zu arbeiten hätte?

24) Man hat drei Fässer. Wird das zweite aus dem ersten gefüllt, so bleibt im ersten $^2/_3$ übrig; wird das dritte aus dem ersten gefüllt, so bleibt $^5/_9$ übrig; wird aber das erste aus den beiden andern gefüllt, so fehlen 8 Maaß. Wie viel Maaß hält jedes von diesen Fässern?

25) Bei dem Verkaufe eines Gutes finden sich zwei Liebhaber ein. Der eine bietet 7000 fl. baar; der andere 8000 fl., jedoch mit der Bedingung, jährlich 2000 fl. ohne Zinsen abzutragen d. h. nach Verlauf des ersten Jahres 2000 fl., nach Verlauf des zweiten Jahres wieder 2000 fl. und so fort, bis die 8000 fl. ganz abgetragen sind. Wenn nun der Verkäufer 5 Procent einfache Zinsen rechnet: welches Gebot ist für ihn das vortheilhafteste?

# Anhang von nützlichen Tabellen.

## I. Tabelle,

die vorzüglichsten Gold- und Silbermünzen nach ihrem Werth in Reichsgeld d. h. nach dem 24½ fl. Fuß darstellend.

Der Kurs wechselt aber bei Goldmünzen häufig.

| Namen der Goldstücke. | Werth. | |
|---|---|---|
| | fl. | Kr. |
| **Goldmünzen.** | | |
| Bairische und würtembergische Karolin . . | 12 | — |
| Bairische Max d'or . . . . . . . . . | 8 | 6 |
| Englischer Souverain . . . . . . . . | 11 | 54 |
| Französischer alter Louisd'or . . . . . | 11 | 36 |
| Französischer neuer Louisd'or . . . . . | 11 | 6 |
| Hannoverscher, Braunschweigscher, Dänischer Friedrichsd'or . . . . . . . . | 9 | 45 |
| Holländisches Zehnguldenstück . . . . | 9 | 54 |
| Napoleonsd'or (Zwanzig Frankenstück) . | 9 | 30 |
| Preußischer Friedrichsd'or . . . . . . . | 9 | 55 |
| Oesterreichischer Souveraind'or . . . . | 16 | 20 |
| Oesterreichischer und holländischer Dukaten | 5 | 36 |
| Würtemberger Dukaten (im Lande fester Preis) . . . . . . . . . . . . | 5 | 45 |
| Amerikanisches 5 Dollar-Stück . . . . | 12 | 30 |
| Griechisches 20 Drachmen-Stück . . . . | 8 | 30 |
| Italienische Pistole (Doublon) . . . . . | 9 | 30 |
| Römische Zechine . . . . . . . . . . | 4 | 52 |

| Namen der Goldstücke. | Werth. | |
|---|---|---|
| | fl. | Kr. |
| **Goldmünzen.** | | |
| Portugiesische Crusado zu 480 Reis . . | 1 | 24 |
| Russische 5 Rubel-Stück . . . . . . . | 9 | 36 |
| Russische Imperialen zu 10 Rubeln . . | 19 | — |
| Spanische Pistole (Doublon) . . . . . . | 9 | 30 |
| Spanische Quadrupel (4 Pistolen) . . | 38 | — |
| **Silbermünzen.** | | |
| Vereinsthaler . . . . . . . . . . . | 3 | 30 |
| Kronenthaler . . . . . . . . . . | 2 | 42 |
| Halber Kronenthaler . . . . . . . . | 1 | 20 |
| Viertelskronenthaler . . . . . . . | — | 39 |
| Konventionsthaler . . . . . . . . . | 2 | 24 |
| Fünffrankenthaler . . . . . . . . . | 2 | 20 |
| Preußischer oder sächsischer Thaler (zu 30 Silbergroschen) . . . . . . . . . | 1 | 45 |
| $\frac{1}{3}$ preußischer Thaler (10 Silbergr.) . . | — | 35 |
| $\frac{1}{6}$ preußischer Thaler (5 Silbergr.) . . | — | 17$\frac{1}{2}$ |
| Guldenstück im 20 fl. Fuß (Oesterreich) . | 1 | 12 |
| Guldenstück im 24 fl. Fuß . . . . . . | 1 | — |
| Halber Gulden . . . . . . . . . . | — | 30 |
| Zwanzig Kreuzerstück im 20 fl. Fuß (Vierundzwanziger) . . . . . . . . . | — | 24 |
| Zehn Kreuzerstück im 20 fl. Fuß (Zwölfer) | — | 12 |
| Fünf Kreuzerstück im 20 fl. Fuß (Sechser) | — | 6 |
| Groschen . . . . . . . . . . . . | — | 3 |
| Kreuzerstück . . . . . . . . . . . | — | 1 |
| Amerikanischer Dollar . . . . . . . . | 2 | 30 |

| Namen der Geldstücke. | Werth. | |
|---|---|---|
| | fl. | Kr. |
| **Silbermünzen.** | | |
| Baseler Thaler . . . . . . . . . . . . . . | 2 | — |
| Englischer Schilling . . . . . . . . . . | — | 36 |
| Französischer Frank . . . . . . . . . . . | — | 28 |
| Griechisches 5 Drachmen-Stück . . . . . | 1 | 56 |
| Griechische Drachme . . . . . . . . . . | — | 25¼ |
| Holländischer Gulden . . . . . . . . . | — | 59 |
| Holländischer Schilling zu 6 Stüver . . . | — | 17 |
| Mailändischer Scudo zu 6 Lire . . . . | 2 | 24 |
| Neapolitanischer Scudo zu 120 Grani . | 2 | 21 |
| Polnischer Gulden . . . . . . . . . . . | — | 18 |
| Portugiesischer Crusado zu 480 Reis . . | 1 | 22 |
| Römischer Scudo zu 5 Lire oder 10 Paoli | 2 | 31 |
| Russischer Silberrubel zu 100 Kopeken . | 1 | 50 |
| Schwedischer Speciesthaler zu 48 Schilling | 2 | 38 |
| Schweizer Franken zu 10 Batzen, dieser zu 10 Rappen . . . . . . . . . . | — | 40 |
| Spanischer Piaster zu 20 Real de Vellon | 2 | 28 |
| Spanischer Real de Vellon . . . . . . . | — | 7,4 |
| Türkischer Piaster zu 40 Para . . . . | — | 50,5 |

Der Werth einer Mark fein Silber fällt zwischen 23 und 24 fl.; und der einer Mark Gold zwischen 364 und 372 fl.

Ueberhaupt aber ist der Werth des Goldes zu dem des Silbers im Durchschnitt wie 15 zu 1.

# II. Tabelle.

## Vergleichung der verschiedenen Fußmaaße mit den französischen.

| Füße in den verschiedenen Ländern und Städten. | Pariser Linien. | Französische Quadratfuß. | Französische Kubikfuß. |
|---|---|---|---|
| Frankreich . . . . . | 144 | 1 | 1 |
| Baden . . . . . . . | 132,9887 | 0,8529 | 0,7877 |
| Bayern . . . . . . . | 129,38 | 0,8071 | 0,7251 |
| Braunschweig . . . | 126,5 | 0,7717 | 0,6779 |
| Dänemark . . . . . | 139,13 | 0,9335 | 0,9018 |
| England . . . . . | 135,1142 | 0,8804 | 0,8260 |
| Frankfurt a. M. . . | 126,162 | 0,7676 | 0,6725 |
| Hamburg . . . . . | 126,967 | 0,7774 | 0,6854 |
| Hannover . . . . . | 129,484 | 0,8085 | 0,7270 |
| Hessen = Darmstadt . | 110,824 | 0,5923 | 0,4558 |
| Hessen = Kassel . . . | 127,536 | 0,7844 | 0,6948 |
| Nassau . . . . . . . | 132,9887 | 0,8529 | 0,7877 |
| Oestreich . . . . . | 140,1308 | 0,9469 | 0,9215 |
| Preußen . . . . . | 139,13 | 0,9335 | 0,9018 |
| Rußland . . . . . | 135,1142 | 0,8804 | 0,8260 |
| Sachsen . . . . . . | 125,537 | 0,7600 | 0,6625 |
| Schweiz . . . . . . | 132,9887 | 0,8529 | 0,7877 |
| Würtemberg . . . . | 127 | 0,7777 | 0,6859 |

In Baden, Hessen=Darmstadt, Nassau, Würtemberg und in der Schweiz wird der Fuß in 10 Zoll, in den übrigen der genannten Länder in 12 Zoll eingetheilt.

In Belgien und in den Niederlanden hat man den französischen Meter = 3,078444 pariser Fuß zur Einheit angenommen und darnach hält 1 Aune (zu 10 Palmen) 443,2959 pariser Linien, die Quadrat=Aune 9,4768 pariser Quadratfuß und die Kubik=Aune 29,1783 pariser Kubikfuß.

## III. Tabelle.

### Meilenmaaß.

| Länder und Städte. | Eine Meile hält pariser Fuß | Auf einen Meridiangrad gehen |
|---|---|---|
| Bayerische . . . . | 22826,6 | 14,9847 |
| Böhmische . . . . | 21270 | 16,0813 |
| Englische . . . . | 4963,33 | 69,04 |
| „ Seemeile . | 5717,13 | 60 |
| Französische . . . | 13681,97 | 25 |
| Holländische . . . | 18055,12 | 18,9447 |
| Italienische . . . . | 5717,13 | 59,82881 |
| Oestreichische . . . | 23355 | 14,6456 |
| Portugiesische . . . | 19057,44 | 17,9483 |
| Preußische . . . . . | 23873,76 | 14,75 |
| Römische, alte, zu 8 Stadien . . . . | 4537 | 75,391 |
| Russische Werste, von denen 7 auf 1 teutsche Meile gehen . . | 3288,2 | 104,0265 |
| Sächsische . . . . | 27912 | 12,255 |
| Schwäbische . . . | 28587 | 11,9652 |
| Schwedische . . . | 32953,5 | 10,38008 |
| Schweizerische . . . | 25795,25 | 13,2608 |
| Spanische . . . . . | 12882 | 26,5546 |
| Teutsche . . . . . | 22803,29 | 15 |
| Türkische . . . . . | 5144,94 | 20,83 |
| Ungarische . . . . . | 25734,35 | 13,2912 |

## IV. Tabelle.

### Getreidemaaß.

| Länder und Städte. | Namen der Maaße. | enthält pariser Kubikzoll |
|---|---|---|
| Altona . . . . | Scheffel . . . . | 5312 |
| Amsterdam . . . | Sack zu 3 Scheff. | 4087 |
| Ansbach . . . | Simra zu 16 Metzen | 17043 |
| Antwerpen . . . | Viertel . . . . | 3867,5 |
| Augsburg . . . | Schaff zu 8 Metzen | 10346 |
| Bamberg . . . | Simra . . . . . | 3948,4 |
| Bayreuth . . . | Simra zu 16 Metzen | 17043 |
| Bayern . . . . | Scheffel zu 6 Metzen | 11209,6 |
| Berlin . . . . | Scheffel . . . . | 2758,952 |
| | Scheffel zu 16 Metzen | |
| | Winspel zu 24 Scheff. | |
| Braunschweig . . | Scheffel zu 10 Himten | 15650 |
| Bremen . . . . | Scheffel . . . . . | 3585,6 |
| Dänemark . . . | Tonne . . . . . | 7013 |
| Danzig . . . . | Scheffel . . . . | 2597,4 |
| England . . . | Quarter . . . . . | 14408 |
| | Bushel . . . . | 1801 |
| Frankfurt a. M. . | Malter zu 4 Simmer | 5784 |
| Frankreich . . . | Boisseau . . . | 656 |
| | Kiliolitre . . . . | 50412,4 |
| | Hectolitre . . . | 5041,24 |
| | Decalitre . . . | 504,124 |
| | Litre . . . . | 50,4124 |
| Hamburg . . . | Scheffel zu 2 Faß | 5312 |
| Hannover . . . | Malter zu 6 Himten | 9408 |
| Hessen=Darmstadt | Simm. zu 4 Kumpfen | 6452,6 |
| Hessen=Kassel . . | Scheffel . . . . | 4045 |
| Holland . . . | Sack zu 3 Scheffel | 4087 |
| Königsberg . . | alter Scheffel . . | 2514 |
| | neuer = . . | 2673 |
| Lübeck . . . . | Roggen=Scheffel . | 1684 |
| | Hafer= = . | 1978 |

| Länder und Städte. | Namen der Maaße. | enthält pariser Kubikzoll |
|---|---|---|
| Neapel . . . . . | Tómolo . . . . . | 2579 |
| Nürnberg . . . | Simra zu 16 Metzen | 16273 |
| Oestreich . . . | Metze . . . . . . | 3100 |
| Preußen . . . | Scheffel . . . . | 2770,7 |
| Riga . . . . . | Lof . . . . . . | 3285 |
| Rußland . . . | Tschetwet zu 8 Tschetwerik . . | 9808 |
| Sachsen . . . | Scheffel . . . . | 5416 |
| Schweden . . . | Tonne . . . . . | 8310 |
| Spanien . . . | Fanega . . . . | 2881 |
| Türkei . . . . | Kislo . . . . . . | 1770 |
| Würtemberg . . | Scheffel . . . . | 10542 |

Ein bayer. Metzen Roggen wiegt trocken 48 bayer. Pfd.
vorzüglicher 49—50 bayer. Pfd.

Ein berliner Scheffel Weizen wiegt 85 Pfd.
" " " Roggen " 80 "
" " " Gerste " 69 "

100 Pfd. guter Roggen gibt 80 bis 82 Pfd. gutes Mehl und diese 80 bis 82 Pfd. Mehl geben gegen 110 Pfd. gutes Hausbrot.

Auf 1 Menschen rechnet man im Durchschnitt täglich 1 bis 1½ Pfd. Brot.

Ein Fuder Wein beträgt 6 Ohm oder 12 Eimer.

Ein Stück in Franken 16 Eimer.

## V. Tabelle.

### Gewicht.

| Namen der Städte und Länder. | 100 Pfund in den angegebenen Städten und Ländern betragen in bayrischen Pfunden |
|---|---|
| Amsterdam . . . . . | 88,196 |
| Augsburg . . . . . | 87,707 Gr. Gew. |
| | 84,387 Kl. Gew. |
| Basel . . . . . . . . | 87,375 |
| Bayern . . . . . . . | 100 |
| Berlin . . . . . . . | 84,497 |
| Braunschweig . . . . | 83,443 |
| Brüssel (Brabant, Antwerpen) . . . . . | 83,684 |
| Bremen . . . . . . . | 89,054 |
| Breslau . . . . . . . | 72,356 |
| Cadix . . . . . . . . | 82,293 |
| Danzig . . . . . . . | 77,746 |
| Florenz und Livorno . . | 60,622 |
| Frankfurt a. M. . . . . | 90,225 |
| Hamburg . . . . . . . | 96,875 |
| Leipzig . . . . . . . | 83,468 |
| London . . . . . . . | 80,981 = 100 Avoir du pois Gew. |
| Lübeck . . . . . . . | 86,3003 |
| Lüneburg (Hannover) . | 87,124 |
| Lüttich . . . . . . . | 84,799 |
| Mailand . . . . . . . | 136,232 |
| Nürnberg . . . . . . | 90,938 |

| Namen der Städte und Länder. | 100 Pfund in den angegebenen Städten und Ländern betragen in bayrischen Pfunden |
| --- | --- |
| Paris . . . . . . . | 87,4 |
| Petersburg (1 Pud = 40 Pfund) . . . . . | 73,028 |
| Triest . . . . . . . | 99,796 |
| Venedig . . . . . . | 81,715 |
| Warschau . . . . . . | 73,862 |
| Wien . . . . . . . | 99,796 |

# VI. Tabelle

über

das neufranzösische Maaß und Gewicht.

Die Grundeinheit des Längenmaaßes heißt Mètre, und ist der zehnmillionte Theil vom vierten Theil eines durch Frankreich gehenden Erdmeridians. Alle Abtheilungen dieses Maaßes sind zehnfach; und zwar zehnfach größer oder zehnfach kleiner. Es heißt das natürliche Maaß, weil es sich auf die wirkliche Größe unserer Erdkugel gründet. In Vergleichung mit dem alten französischen Maaße ist ein Mètre = 3,078444 pariser Fuß oder
= 3 Fuß, 0 Zoll, 11,2959 Linien
= 443,2959 paris. Linien.
Décamètre = 10 Mètres = 30,78444 Fuß.
Kilomètre = 100 Mètres = 307,8444 Fuß.
Myriamètre = 1000 Mètres = 3078,444 Fuß.
Decimètre = 0,1 Mètre = 44,32959 Linien.
Centimètre = 0,01 Mètre = 4,432959 Linien.
Millimètre = 0,001 Mètre = 0,4432959 Linien.

Dagegen ist ein alter pariser Fuß = 324,839 Millimètres; 1 pariser Zoll = 27,069 Millimètres, und 1 Linie = 2,255 Millimètres.

Die Einheit des Flächenmaaßes ist das Quadrat des Mètre (Mètre carré) und beträgt 9,476817461136 paris. Quadratfuß. Are ist = 100 Quad. Mètres = 947,6817461136 paris. Quadratfuß. Are ist die Einheit für das Feldmaaß, dessen Zehnfaches Hectare ist, wovon 3,4 auf einen bayrischen Morgen gehen.

Die Einheit des Kubik- oder Körpermaaßes heißt Litre, und es ist ein

Litre = 50,412416 paris. Kubikzoll.
Decalitre = 10 Litres = 504,12416 Kubikz.
Hectolitre = 5041,2416 Kbkzoll = 2,7 bayr. Metzen.
Decilitre = 0,1 Litre = 5,0412416 Kubikz.

Der Kubus des Mètre (Mètre cube) wird als Holzmaaß Stère genannt und ist = 29,17385185 paris. Kubikfuß.

Die Einheit des Gewichts heißt Gramme, und es ist ein

Gramme = 280,242 köllnischen Richtpfennigen.
Decagramme = 2802,42 „ „
Hectogramme = 28024,2 „ „
Kilogramme = 280242 „ „
Myriagramme = 2802420 „ „
Decigramme = 28,0242 „ „
Centigramme = 2,80242 „ „
Milligramme = 0,280242 „ „

Ende.

Druck von H. Höreth in Bayreuth.

# Anhang.

## Von den Ketten- und Näherungs-Brüchen.

§. 1. Große Brüche, wie $\frac{723184}{5860592}$, geben keine ganz klare Vorstellung von ihrem Werthe. Man begnügt sich daher in vielen Fällen mit kleineren Brüchen, welche sich dem Werthe der großen mehr oder weniger nähern und daher auch Näherungs-Brüche heißen. Die Kunst, solche Näherungsbrüche zu finden, geben die Kettenbrüche an die Hand.

§. 2. Es ist aber ein Kettenbruch, Stufenbruch, auch continuirlicher Bruch genannt, ein solcher Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, welcher abermals in seinem Nenner eine ganze Zahl mit angehängtem Bruche hat, dessen Nenner wiederum die Summe einer ganzen Zahl und eines Bruches ist u. s. w., so daß diese Verkettung der Brüche ohne Ende fortgehen oder irgendwo abbrechen kann. Die Zähler solcher Brüche sind ganze Zahlen; man wählt aber gerne die Einheit, weil dadurch die Darstellung einfach wird und ausreicht, um die wichtigsten und leicht zu begreifenden Eigenschaften der Kettenbrüche abzuleiten. Beispiel eines solchen Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

§. 3. Aufgabe. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Auflösung. Damit der gegebene Bruch in einen Kettenbruch, dessen sämmtliche Zähler Eins sind, ver-

wandelt werde, dividire man dessen Zähler und Nenner durch den Zähler; der Rest des Nenners mit dem Divisor gibt einen neuen Bruch, dessen Zähler und Nenner abermals durch den eigenen Zähler dividirt wird. Auf diese Weise fahre man fort, bis die Division aufgeht. Der erste der dadurch entstehenden neuen Brüche bildet das erste Glied des gesuchten Kettenbruches; der zweite wird dem Nenner des ersten Bruches durch Addition (+) angehängt; der dritte ebenso dem Nenner des zweiten; der vierte dem Nenner des dritten u. s. w. bis zu Ende.

Man soll z. B. den Bruch $\frac{108}{695}$ in einen Kettenbruch verwandeln; die Rechnung sieht also aus:

$$
\begin{array}{r|l}
108)\ \frac{108}{695} & \frac{1}{6} \\
648 & \\
47)\ \frac{47}{108} & \frac{1}{2} \\
94 & \\
14)\ \frac{14}{47} & \frac{1}{3} \\
42 & \\
5)\ \frac{5}{14} & \frac{1}{2} \\
10 & \\
4)\ \frac{4}{5} & \frac{1}{1} \\
4 & \\
1)\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Demnach ist

$$\frac{108}{695} = \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}}$$

§. 4. Ist der gegebene Bruch ein unächter, so zieht man die Ganzen heraus, und mit dem bleibenden ächten Bruch verfährt man wie vorhin (§. 3). Es sei z. B. gegeben $\frac{2357}{65}$. Man ziehe die Ganzen heraus, so erhält man $36\frac{17}{65}$. Der Bruch $\frac{17}{65}$ gibt den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.}}}}}$$

Demnach ist $\frac{2357}{65} = 36\frac{7}{65} = 36 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2.}}}}}$

§. 5. Decimalbrüche können gleichfalls in Kettenbrüche verwandelt werden, indem man sie als gewöhnliche Brüche schreibt und dann mit ihnen verfährt, wie vorhin gelehrt worden ist. Bei unendlichen Decimalbrüchen bricht man da ab, wo man es für gut findet oder wo es die Genauigkeit der Sache verstattet. Beispiel:

$$0{,}4375 = \frac{4375}{10000} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2.}}}$$

§. 6. Die einzelnen Brüche, welche an einander gereihet den Kettenbruch ausmachen, heißen seine Glieder. So sind in dem gegebenen Beispiel (§. 3) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$ Glieder des Kettenbruches, und der gegebene Bruch $\frac{108}{695}$ selbst heißt der Hauptbruch.

§. 7. Nimmt man von diesen Gliedern eines, zwei, drei, vier u. s. w. nach einander zusammen und bringt sie unter einerlei Benennung, so heißen die so erhaltenen Brüche die Partial- oder Theilwerthe des Kettenbruches. Im obigen Beispiel (§. 3 u. 6) ist demnach $\frac{1}{6}$ der erste und zwar, wie von selbst einleuchtet, der kleinste oder geringste Theilwerth; aber $\frac{1}{6+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{13}{2}} = \frac{2}{13}$ nähert sich schon mehr dem

Hauptbruch; nimmt man drei Glieder

$$\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{6+\frac{3}{7}} = \frac{1}{\frac{45}{7}} = \frac{7}{45},$$

so ist man dem Hauptbruch noch näher als vorhin. Wir nehmen jetzt die vier ersten Theilwerthe des Kettenbruches, verfahren wie vorhin und erhalten

$$\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{7}{2}}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{2}{7}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{\frac{16}{7}}}$$

$$= \frac{1}{6+\frac{7}{16}} = \frac{1}{\frac{103}{16}} = \frac{16}{103},$$ ein Werth, welcher dem Hauptbruch wiederum am Werthe näher steht als der vorige. Jetzt nehmen wir noch den vorletzten Theilwerth hinzu und erhalten

$$\frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{10}{3}}}}$$

$$= \frac{1}{6+\frac{1}{2+\frac{3}{10}}} = \frac{1}{6+\frac{1}{\frac{23}{10}}} = \frac{1}{6+\frac{10}{23}} = \frac{1}{\frac{148}{23}} = \frac{23}{148}$$

Und dies ist der letzte und dem Hauptbruche am nächsten stehende Werth. Bringen wir vollends noch das letzte Glied in Rechnung, so muß, wie sich von selbst versteht, auch wieder der volle Hauptbruch zum Vorschein kommen. Wir geben zwar die Rechnung, überspringen aber, der Kürze und Selbstübung wegen, immer je eine Zwischenrechnung. Demnach ist

$$\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\frac{4}{5}}}}}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{14}}}}$$

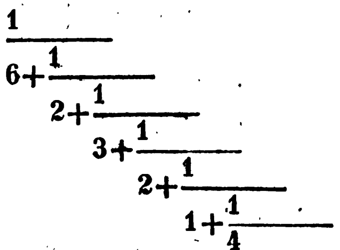
$$=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\frac{14}{47}}}=\cfrac{1}{6+\frac{47}{108}}=\frac{108}{695}.$$

§. 8. Solche Partial- oder Theilwerthe eines Kettenbruches oder Hauptbruches heißen, von ihrer Natur, Näherungsbrüche, weil, je mehr man Glieder desselben zusammennimmt, man sich immer mehr dem vollen Werthe des Hauptbruches nähert. In den meisten Fällen der Anwendung auf wirkliche Fälle genügt es schon, wenn man auch nur zwei, drei oder höchstens die vier ersten Glieder berechnet. Nach der Ordnung haben wir vorhin des Bruches $\frac{108}{695}$ Näherungsbrüche gefunden: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{7}{45}$, $\frac{16}{103}$ und $\frac{23}{148}$. Dabei zeigt sich die Eigenthümlichkeit, daß der erste, dritte, fünfte u. s. w. Näherungsbruch immer größer als der Hauptbruch; dagegen der zweite, vierte, sechste u. s. w. immer kleiner als derselbe ist. Eine andere Eigenthümlichkeit ist es, daß der Unterschied (die Differenz) zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Näherungsbrüchen ein Bruch ist, welcher zum Zähler die Einheit und zum Nenner das Produkt ihrer Nenner hat. Z. B. $\frac{1}{6}-\frac{2}{13}=\frac{1.13}{6.13}-\frac{2.6}{6.13}$ $=\frac{13-12}{6\,.\,13}=\frac{1}{6.13}=\frac{1}{78}$; $\frac{7}{45}-\frac{2}{13}=\frac{7.13}{45.13}-\frac{2.45}{45.13}$ $=\frac{1}{45.13}=\frac{1}{585}$ u. s. w.

§. 9. Aufgabe. Einen Kettenbruch auf einen gewöhnlichen Bruch zurück zu führen.

Auflösung. Man mache den Weg, welchen wir oben (§. 3) bei der Verwandlung der Brüche in Kettenbrüche eingeschlagen haben, rückwärts und folglich von

dem letzten Theile des Kettenbruches anfangend, verwandele die gemischten Zahlen in unächte Brüche, und verfahre ganz so, wie wir oben (§. 7) gethan haben, bis der verlangte Bruch gefunden ist. Das Verfahren ist besonders bei großen Kettenbrüchen etwas lästig. Man kann es aber gar leicht machen, wenn man demselben eine andere Form gibt, die jedoch auf dem nämlichen Grunde ruht. Man schreibe nämlich alle Nenner des Kettenbruches, vom obersten oder ersten anfangend und bis zum letzten in der gegebenen Ordnung fortschreitend, neben einander und ziehe darunter einen Querstrich. Unter denselben setze man, von der Rechten anfangend, zuerst die Zahlen 0 und 1 dergestalt, daß 0 um eine Stelle weiter hinaussteht als die letzte der oberhalb des Querstriches stehenden Zahlen, und 1 unter die letzte obere Zahl zu stehen kommt. Jede folgende Zahl der unteren Reihe gegen die Linke wird nun so gefunden, daß man die vorhergehende untere Zahl mit der gerade darüber stehenden Zahl der obern Horizontalreihe multiplicirt und zu diesem Produkte die in der unteren Horizontalreihe vorhergehende oder zur Rechten stehende Zahl addirt. Die beiden am weitesten oder letzten zur Linken stehenden Zahlen der untern Reihe sind der Zähler und Nenner des zu suchenden Bruches, und zwar die vorletzte der Zähler und die letzte der Nenner. Zum Beispiele wählen wir, der Vergleichung wegen, das schon oben (§. 7) berechnete, welches also aussieht:



Die Berechnung ist einfach $\begin{array}{cccccccc} & 6 & 2 & 3 & 2 & 1 & 4 & \\ \hline 695 & 108 & 47 & 14 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{array}$

Die beiden letzten zur Linken stehenden Zahlen geben den gesuchten Bruch $\frac{108}{695}$ wie oben.



